


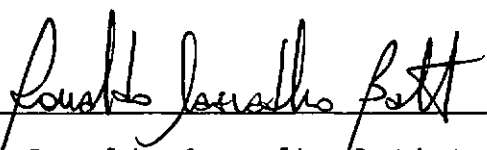
ESTUDO COMPARATIVO DE ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA,
APLICADOS A PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE

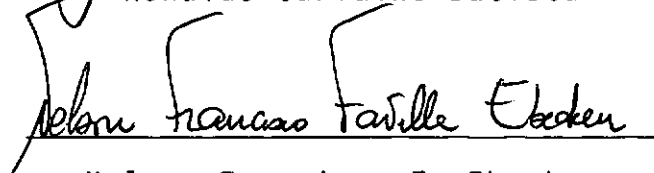
Roseane Lemgruber Vilela

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:


Luiz Eloy Vaz
Presidente


Ronaldo Carvalho Batista


Nelson Francisco F. Ebecken


Fernando Venâncio Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 1983

VILELA, ROSEANE LEMGRUBER

Estudo Comparativo de Algoritmos de Integração Direta Aplicados
a Problemas de Condução de Calor Transiente (Rio de Janeiro)
1983.

vii, 145 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil,
1983).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. de Engenharia.

1. Assunto: Algoritmos de Integração Direta

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

DEDICATÓRIA

Aos meus pais

e

ao meu marido

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Luiz Eloy Vaz pelo apoio e orientação dispensados na realização deste trabalho.

A Comissão Nacional de Energia Nuclear pelo apoio concedido.

RESUMO

O presente trabalho é um estudo comparativo de algoritmos de integração direta para problemas lineares bi-dimensionais de condução de calor transiente.

A discretização espacial do sistema de equações diferenciais do problema foi feita utilizando o Método dos Elementos Finitos, em particular, para o elemento isoparamétrico parabólico.

Na discretização temporal foram utilizados os Algoritmos Hermitianos de Integração Numérica.

Um programa de computador em FORTRAN foi desenvolvido para a resolução dos exemplos ilustrativos e de aplicação prática no sentido de estudar as propriedades e eficiência computacional das expansões linear e cúbica dos Algoritmos Hermitianos.

ABSTRACT

A comparative study of direct integration algorithms was developed in this work for linear two-dimensional transient heat conduction problems.

The system of differential equations of the problem was integrated, in space, by the use of the Finite Element Discretization Technique, using the curved isoparametric "quadrilateral" element. For time discretization, the Hermitian ζ -Operators were used.

The development of a digital computer program in FORTRAN was done and several examples were given to illustrate the properties and computational effort of the linear and cubic expansions of the Hermitian ζ -Operators.

Í N D I C E

	<u>Página</u>
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - HISTÓRICO	3
CAPÍTULO III - CONCEITOS BÁSICOS DA CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE	5
CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NA ANÁLISE DA CONDUÇÃO DE CALOR	16
IV.1 - Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin.	16
IV.2 - Formulação Variacional	27
CAPÍTULO V - SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM DA ANÁLISE TRANSIENTE DA CONDUÇÃO DE CALOR ..	34
V.1 - Análise Modal	37
V.2 - Técnica da Integração Direta	40
CAPÍTULO VI - OPERADORES HERMITIANOS DE INTEGRAÇÃO	41
VI.1 - Expansão Linear	42
VI.2 - Expansão Cúbica	53
CAPÍTULO VII - APLICAÇÕES NUMÉRICAS	63

CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES	131
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133
APÊNDICE A - MANUAL DO USUÁRIO DO PROGRAMA "HEAT"	137

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Processos envolvendo transferência de calor são normalmente encontrados em engenharia. Transferência de calor é uma ciência de processos irreversíveis de propagação de calor no espaço. Entende-se por propagação de calor, a troca de energia interna entre elementos individuais e considerando regiões do meio que os cercam.

Calor pode ser transmitido de tres maneiras: por condução, convecção e radiação. A condução de calor é identificada como um processo de transporte molecular de calor em corpos, ou entre corpos, devido à variação de temperatura no meio considerado.

O estudo da condução transiente de calor tem inúmeras aplicações em engenharia. Em particular, vários elementos estruturais de um prédio de reator de Usinas Nucleares devem ser dimensionados para resistir a altas temperaturas, tanto em condições normais de operação quanto especialmente, no caso de acidentes postulados nas tubulações do circuito primário. Este fato motivou o início desta pesquisa, na qual é apresentado um estudo linear de condução de calor transiente.

A técnica de discretização por Elementos Finitos é usada para reduzir a solução contínua espacial a um número finito de incógnitas, dependentes do parâmetro tempo. O método é desenvolvido em detalhes para estruturas bi-dimensionais, as quais

foram idealizadas por sistema de elementos isoparamétricos parabólicos.

Para a integração numérica no tempo foram utilizadas as expansões linear e cúbica dos Algoritmos Hermitianos de Integração. Os diversos operadores de tempo foram investigados individualmente no que diz respeito à precisão, estabilidade e efetividade computacional.

O objetivo desta pesquisa foi o estudo comparativo dos algoritmos de integração direta quanto as propriedades citadas anteriormente. Para isso, um programa de computador em FORTRAN foi desenvolvido e vários exemplos foram feitos para ilustrar a viabilidade do uso dos diversos algoritmos.

CAPÍTULO II

HISTÓRICO

Ao contrário da grande quantidade de publicações sobre soluções analíticas das equações diferenciais de calor, existem apenas algumas contribuições esporádicas da solução por elementos finitos para problemas de condução de calor transiente.

É fato também, que existem poucas publicações a respeito dos problemas de operadores de tempo e suas propriedades nos resultados por elementos finitos. A maioria dos artigos existentes apresenta um, ou alguns algoritmos, de uma maneira específica e aplicado a um problema em particular, para ilustrar uma eficiência superior. Pouco é discutido a respeito da precisão e estabilidade dos operadores em relação a sua eficiência computacional.

As primeiras publicações a respeito de soluções por elementos finitos de problemas transientes de condução de calor foram baseadas em modificações da regra trapezoidal (Crank - Nicolson Scheme) no sentido de estabilizar suas tendências oscilatórias [2], [3]. Por outro lado, as virtudes sobre a estabilidade do algoritmo Backward foram redescobertas repetidamente [4]. Ao mesmo tempo, o método dos elementos finitos foi usado para aproximar, globalmente, a solução no intervalo de tempo Δt [5]. Assim, o problema foi expresso na forma de métodos residuais ou expansões de Galerkin similares [6], [7]. Várias expansões foram propostas para aumentar a precisão dos métodos usando expan-

sões de ordem superior [8].

A primeira tentativa de unificar diferentes pontos de vista sobre análise numérica e programas computacionais de engenharia, para a solução de problemas de condução de calor transiente, foi escrita em 1977, na Alemanha [1]. Neste trabalho foi desenvolvida uma aproximação no domínio do tempo, tal que, uma precisão de alta ordem e estabilidade foram conseguidas através de uma melhora da expansão linear do algoritmos de integração.

CAPÍTULO III

CONCEITOS BÁSICOS DA CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE

- Campo de Temperatura

O fenômeno da condução de calor é um processo de propagação da energia térmica por contato direto entre as partículas de um corpo, ou entre corpos com temperaturas diferentes.

Qualquer fenômeno físico é geralmente acompanhado por uma mudança, no tempo e espaço, das suas grandezas físicas. O processo de condução de calor, como outros tipos de transferência de calor, ocorre apenas quando diferentes pontos de um corpo (ou de um sistema de corpos) estão com temperaturas diferentes. Logo, a condução em corpos sólidos geralmente ocorre com variações de temperatura no espaço e no tempo.

$$T = f(x, y, z, t) \quad (\text{III-1})$$

A equação (III-1) é a expressão matemática para o campo de temperatura que atua sobre um corpo em um determinado momento.

Este tipo de equação é característica da condução de calor transiente, na qual a temperatura varia com o tempo (t) e em cada ponto do corpo de coordenadas x , y e z .

- Gradiente de Temperatura

Se todos os pontos de um corpo, tendo a mesma temperatura, são ligados, nós obtemos uma superfície de temperaturas iguais, chamada de isoterma. Já que nenhum ponto de um corpo possui simultaneamente diferentes temperaturas, superfícies isotermas não se interceptam.

A interseção das superfícies isotermas por um plano nos dá uma família de isotermas neste plano. A figura III-1 representa uma família de isotermas diferindo por uma variação de temperatura de $\pm \Delta T$.

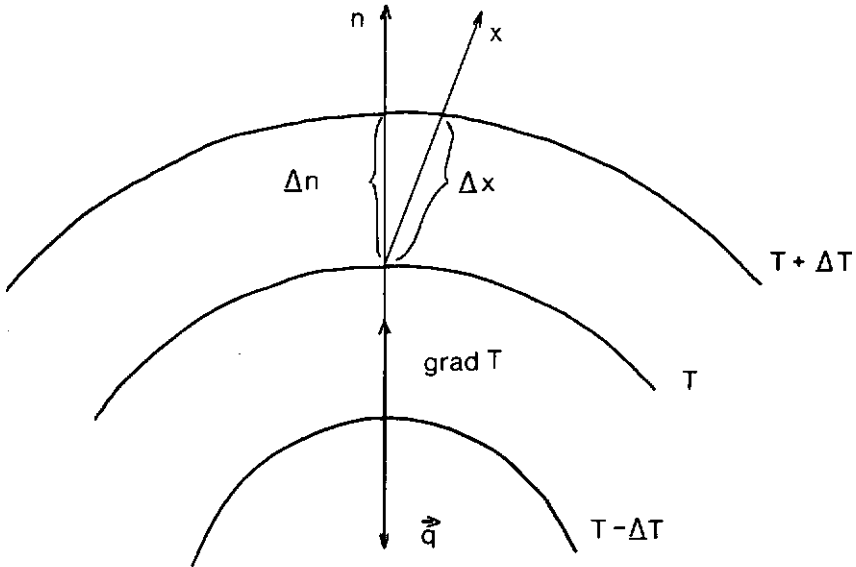


FIG. III-1 - FAMÍLIA DE ISOTERMAS

A temperatura de um corpo varia somente em direções não tangentes às superfícies isotermas. A maior diferença de temperatura por unidade de comprimento é observada na direção normal à superfície isoterma. Um aumento de temperatura nesta direção é chamado de gradiente de temperatura.

O gradiente de temperatura é um vetor normal à superfície isoterma e é positivo na direção do aumento de temperatura. Numericamente é igual a derivada da temperatura nesta direção:

$$\text{grad } T = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III-2})$$

onde:

\vec{n} = vetor unitário normal à superfície isoterma e positivo na direção do aumento de temperatura.

$\frac{\partial T}{\partial n}$ = derivada da temperatura ao longo da normal n .

- Lei de Fourier

De acordo com a lei de Fourier, a quantidade de calor dq , passando através de um elemento de uma superfície isoterma dF por intervalo de tempo dt , é proporcional ao gradiente de temperatura $\frac{\partial T}{\partial n}$, de acordo com a equação (III-3):

$$dq = - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial n} dF dt \quad (\text{III-3})$$

O fator de proporcionalidade K_{ℓ} da equação (III-3)

foi provado experimentalmente ser uma propriedade física da substância. Ele define a capacidade da substância de conduzir calor e é chamado de condutividade térmica.

Definindo agora, fluxo de calor como sendo a quantidade de calor transferido através de uma área unitária da superfície isoterma por unidade de tempo, chegamos a um vetor definido pela seguinte relação:

$$\vec{q} = - \vec{n} K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III-4})$$

O vetor \vec{q} é normal à superfície isoterma e é positivo na direção da diminuição de temperatura, uma vez que a transferência de calor se passa das regiões mais quentes de um corpo para as mais frias. Consequentemente, os vetores \vec{q} e $\vec{\text{grad}T}$ possuem a mesma direção mas sentidos opostos (ver fig. III-1). Isto explica o sinal negativo das equações (III-3) e (III-4).

O escalar correspondente ao fluxo de calor \vec{q} é igual a:

$$q = - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III-5})$$

E suas projeções sobre os eixos coordenados valem:

$$\begin{aligned} q_x &= - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial x} \\ q_y &= - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial y} \\ q_z &= - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

Assim, os fluxos de calor expressos nas equações (III-6) são componentes do vetor representando a variação do fluxo de calor \vec{q} , de um corpo.

$$\vec{q} = \vec{i} q_x + \vec{j} q_y + \vec{k} q_z \quad (\text{III-7})$$

- Equação Diferencial da Condução de Calor

A meta do estudo de qualquer fenômeno físico é estabelecer uma relação entre as quantidades ou propriedades características do fenômeno considerado. Em processos físicos mais complexos, isto é dificultado devido as propriedades variarem consideravelmente com o espaço e o tempo. Nestes casos assume-se pequenos intervalos de tempo e somente um volume elementar do corpo é considerado. Isto torna possível ignorar variações em certas características do processo, e simplifica consideravelmente sua análise.

O volume elementar (dv) e o intervalo de tempo elementar (dt) selecionados são suficientemente grandes para desprezarmos a estrutura discreta do corpo e o considerarmos como um meio contínuo. Integrando esta equação diferencial, nós podemos obter a relação analítica entre valores para todo o limite de integração e para qualquer intervalo de tempo considerado.

Para facilitar este estudo, as seguintes considerações são feitas:

- a) o sólido é homogêneo e isotrópico;
- b) os parâmetros físicos são constantes;

- c) a deformação do volume considerado, devido a variações de temperatura, é muito pequena em relação ao volume;
- d) as fontes internas de calor são uniformemente distribuídas pelo sólido.

A equação diferencial da condução de calor é baseada na lei da conservação de energia que pode ser formulada da seguinte maneira:

"A quantidade de calor dQ adquirida na condução, por um volume elementar dv , durante um intervalo de tempo dt , é igual a mudança de energia interna (ou entalpia) da substância contida no volume".

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ \quad (\text{III-8})$$

onde,

dQ_1 = quantidade de calor absorvida por condução

dQ_2 = quantidade de calor liberada do volume elementar pelas fontes internas de calor

dQ = variação da energia interna da substância contida no volume dv , no intervalo de tempo dt .

Para acharmos os termos da equação (III-8), consideremos um paralelepípedo elementar num corpo com lados dx , dy e dz (fig. III-2) de forma que seus lados sejam paralelos aos correspondentes planos coordenados.

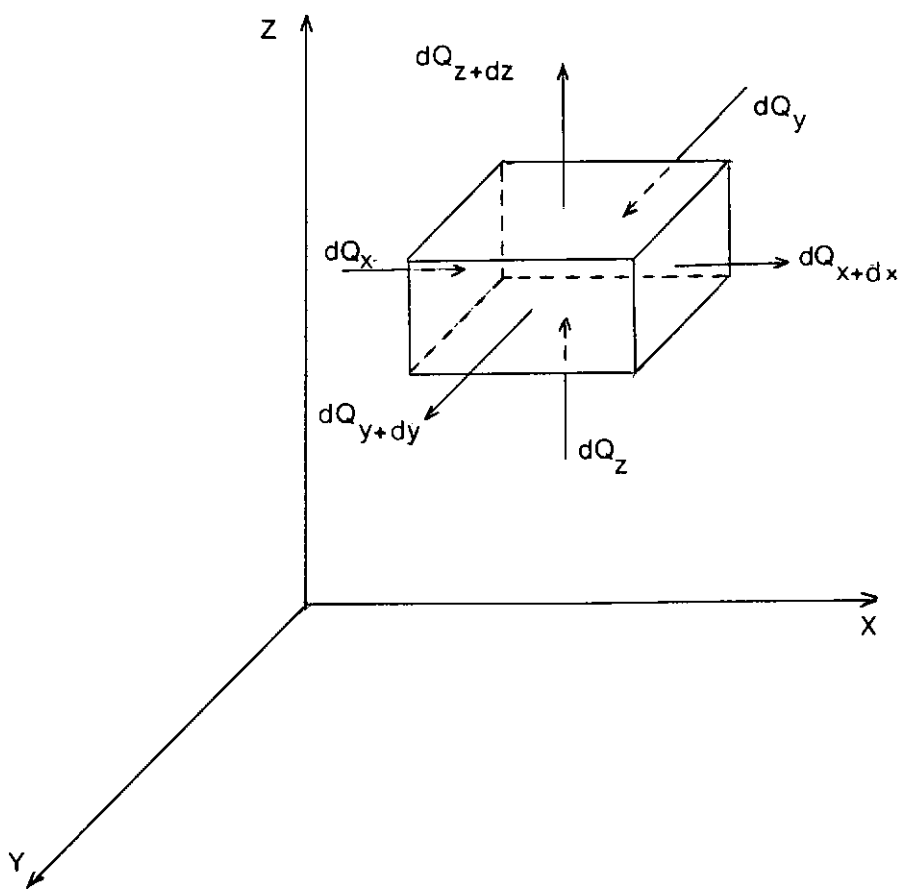


FIG. III-2

dQ_x , dQ_y e dQ_z são as quantidades de calor absorvidas pelo volume elementar dv , num intervalo de tempo dt , na direção dos eixos x , y e z respectivamente. dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} e dQ_{z+dz} são as quantidades de calor removidas pelos lados opostos do paralelepípedo.

Podemos dizer que:

$$dQ_x = q_x \, dy \, dz \, dt \quad (\text{III-9})$$

onde,

q_x = projeção da variação do fluxo de calor na direção x do plano indicado na figura

Da mesma forma, dizemos que:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt \quad (\text{III-10})$$

A diferença entre dQ_x e dQ_{x+dx} nos dá a quantidade de calor dQ_{x1} . Assim:

$$dQ_{x1} = q_x dy dz dt - q_{x+dx} dy dz dt \quad (\text{III-11})$$

Como q_{x+dx} é contínuo no intervalo dx considerado, podemos expandi-lo na série de Taylor:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (\text{III-12})$$

Substituindo a equação (III-12) na equação (III-11) e desprezando os termos de ordem superior, temos:

$$dQ_{x1} = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt \quad (\text{III-13})$$

Da mesma maneira podemos achar os valores de dQ_{y1} e dQ_{z1} . Assim, o valor final para dQ_1 será:

$$dQ_1 = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (\text{III-14})$$

O segundo termo da equação (III-8) é dado por:

$$dQ_2 = q_v dv dt \quad (\text{III-15})$$

onde,

q_v = quantidade de calor emitida pelas fontes internas de calor num volume elementar por unidade de tempo.

O terceiro termo da equação (III-8) depende da natureza do processo termo-dinâmico no qual está sujeito o sistema.

No caso de um processo a volume constante, todo o calor transferido para o volume elementar é gasto para mudar a energia interna da substância contida neste volume. Assim:

$$dQ = dU$$

onde,

$$dU = C_v \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad dv = c \quad \rho \quad \frac{\partial T}{\partial t} dt \quad dv \quad (III-16)$$

c = capacidade de calor a volume constante por unidade de massa ou calor específico.

ρ = densidade da substância.

Substituindo equações (III-14), (III-15) e (III-16) na equação (III-8), nós obtemos:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (III-17)$$

ou

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{q} + q_v \quad (III-18)$$

A equação (III-18) é a equação diferencial para processos de transferência de calor a volume constante.

Em sólidos, a transferência de calor obedece a "Lei de Fourier", que diz:

$$\vec{q} = - K_{\ell} \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{III-19})$$

onde,

\vec{q} = quantidade de calor por unidade de área isoterma por unidade de tempo.

K_{ℓ} = condutividade térmica que depende do material em questão.

$\vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}$ = gradiente de temperatura.

As projeções do vetor, que representa a quantidade de calor q , sobre os eixos x , y , z nos dão:

$$q_x = - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = - K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{III-20})$$

Substituindo as equações (III-20) na equação (III-18), nós obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{\ell} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c\rho} \quad (\text{III-21})$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \operatorname{div} (K_{\ell} \operatorname{grad} T) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (\text{III-22})$$

A equação (III-21), tal como a equação (III-22), é chamada de Equação Diferencial da Condução de Calor.

Assumindo as características físicas e térmicas constantes (K_ℓ , c e ρ), a equação (III-21) toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K_\ell}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho} \quad (\text{III-23})$$

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

NA ANÁLISE DA CONDUÇÃO DE CALOR

As vantagens do Método dos Elementos Finitos são inúmeras quando comparadas a outras aproximações numéricas. O método é completamente geral com respeito a geometria e as propriedades do material. Por esse motivo, a técnica de discretização por Elementos Finitos é usada para reduzir a solução contínua espacial (equação III-23) num número finito de incógnitas, dependentes apenas do tempo. As condições de contorno de temperatura ou de fluxo de calor podem ser especificadas em qualquer ponto dentro do sistema dos Elementos Finitos.

Serão apresentados dois métodos para se achar a formulação integral do problema de condução de calor a partir da equação diferencial: Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin e um Princípio Variacional. O meio contínuo será então discretizado espacialmente pelo Método dos Elementos Finitos e as formulações integrais degeneram então, num sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.

IV.1 - Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin

Sendo a equação diferencial da condução de calor:

$$\rho c \dot{T} = \text{div} (K_{\ell} \text{ grad } T) + q_v \quad (\text{IV-1})$$

onde,

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} \neq 0 \quad \text{pois} \quad T = T(x, y, z, t)$$

Na forma matricial chamaremos:

$$\text{grad } T = \underline{D}T$$

$$\text{e} \quad \text{div} (K_{\ell} \text{ grad } T) = \underline{D}^t (K_{\ell} \underline{D}T)$$

onde,

\underline{D} é um vetor 3×1 e \underline{D}^t é o vetor transposto.

$$\underline{D} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\}$$

K_{ℓ} é uma matriz 3×3 (x, y, x) simétrica:

$$K_{\ell} = \begin{bmatrix} K_{\ell 1} & K_{\ell 2} & K_{\ell 4} \\ K_{\ell 2} & K_{\ell 3} & K_{\ell 5} \\ K_{\ell 4} & K_{\ell 5} & K_{\ell 6} \end{bmatrix}$$

Para materiais isotrópicos temos:

$$\underline{K}_\ell = \begin{bmatrix} K_\ell & 0 & 0 \\ 0 & K_\ell & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell \end{bmatrix}$$

Assim, a equação (IV-1) fica:

$$\rho c \dot{T} = \underline{D}^t (\underline{K}_\ell \underline{D}T) + q_v$$

ou

$$\rho c \dot{T} - \underline{D}^t \underline{K}_\ell (\underline{D}T) = q_v \quad (IV-2)$$

A equação (IV-2) é a forma matricial da equação (IV-1).

Para uma solução determinada da equação acima precisamos introduzir as condições de contorno.

Na superfície do corpo agem temperaturas prescritas ou fluxo de calor prescritos como função do espaço e do tempo. Com isso, temos as seguintes condições de contorno:

$$T(\bar{x}, t) = \bar{T}(\bar{x}, t) \quad \text{em } F_T \quad (IV-3)$$

$$q_n(\bar{x}, t) = \bar{q}_F(\bar{x}, t) \text{ ou } \bar{q}_h(\bar{x}, t) \quad \text{em } F_q$$

As condições de contorno agem numa superfície F , onde F se compõe dos contornos F_T e F_q (fig. IV-1), de tal maneira que:

$$\begin{cases} F = F_T \cup F_q \\ 0 = F_T \cap F_q \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

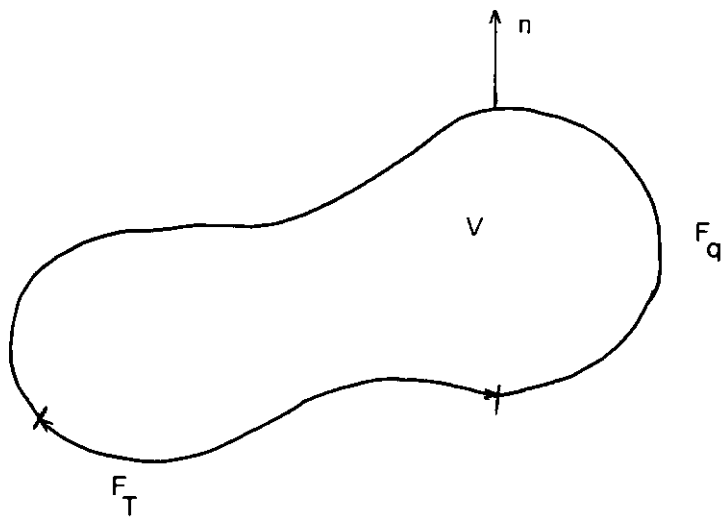


FIG. IV-1 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DE TEMPERATURA E FLUXO DE CALOR PRESCRITOS.

F_T representa a parte da superfície com temperatura prescrita, enquanto F_q representa a parte na qual \bar{q}_F é prescrito.

q_n é a quantidade de calor que percorre o elemento por unidade de tempo, por unidade de superfície dF_q com a normal à superfície n . Assim:

$$q_n(\bar{x}, t) = \frac{dq}{dF_q dt} = -n^t K_\ell(\underline{DT}) = -\underline{D}_n^t K_\ell(\underline{DT}) \quad (\text{IV-5})$$

O vetor \underline{D}_n contém os cossenos diretores da normal \underline{n} em um ponto da superfície F_q , na qual, é especificada um fornecimento de calor prescrito $\bar{q}_F(\bar{x}, t)$. Nesta mesma superfície F_q pode, ao invés do fornecimento de calor prescrito \bar{q}_F , existir uma troca de calor com o meio que a cerca. Sendo T_∞ a temperatura do meio e h o coeficiente de transmissão de calor entre a superfície e o meio, temos:

$$\bar{q}_h(\bar{x}, t) = h \left[T(\bar{x}, t) - T_\infty(\bar{x}, t) \right] \quad (\text{IV-6})$$

Como o fluxo de calor percorre o elemento da zona de temperatura mais alta para a mais baixa, o sinal de \bar{q}_h está determinado na equação (IV-6), isto é, será negativo se $T_\infty > T$ e positivo se $T_\infty < T$, conforme mostra a figura (IV-2).

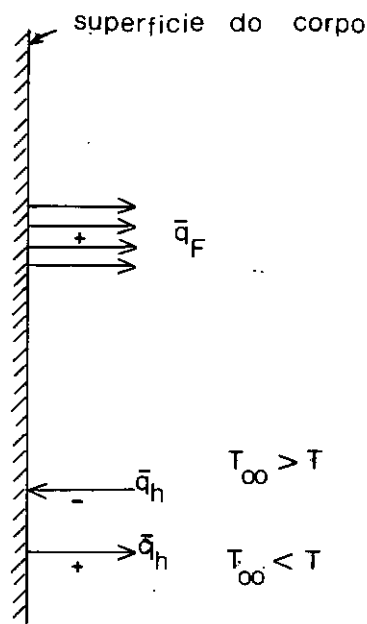


FIG. IV-2 - CONVENÇÃO DE SINAL PARA \bar{q}_F .

Da mesma forma convencionaremos o sinal do fluxo de calor prescrito \bar{q}_F , conforme a figura IV-2.

Temos então, as seguintes condições de contorno:

$$T(\bar{x}, t) = \bar{T}(\bar{x}, t) \quad \text{em } F_T \quad (\text{IV-7})$$

$$\text{e} \quad -\underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) = h (T - T_\infty) + \bar{q}_F$$

Segundo o método dos resíduos ponderados, o resíduo da equação (IV-2) precisa, no sentido da integral, desaparecer.

Em analogia ao princípio dos trabalhos virtuais, no método de Galerkin escolhemos como função peso um campo de temperatura virtual δT , que preenche exatamente as condições de contorno de temperatura F_T .

A equação geral da transferência de calor (IV-2) é definida então, incluindo as condições de contorno (IV-7) de F_q , dessa forma:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta T \left[\rho c \dot{T} - \underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) - q_v \right] dv + \\ & + \int_{F_q} \delta T \left[\underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) + \bar{q}_F + h(T - T_\infty) \right] dF = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-8})$$

Se nós definirmos a seguinte relação:

$$(\text{div } \underline{u})v = \text{div}(\underline{u}, v) - \underline{u}(\text{grad } v)$$

ou

$$\delta T \underline{D}^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) = \underline{D}^t (\delta T \underline{K}_\ell \underline{DT}) - (\underline{D} \delta T)^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) \quad (\text{IV-9})$$

E usarmos o teorema de Gauss da seguinte forma:

$$\int_V \underline{D}^t \left[\delta T \underline{K}_\ell (\underline{DT}) \right] dv = \int_F \delta T \underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) dF \quad (\text{IV-10})$$

Desenvolvendo então, a equação (IV-8), temos:

$$\begin{aligned} & \int_V \rho c \dot{T} \delta T dv - \int_V \delta T \underline{D}^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) dv - \int_V \delta T q_v dv + \\ & + \int_{F_q} \delta T \underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) dF + \int_{F_q} \delta T h(T - T_\infty) dF + \\ & + \int_{F_q} \delta T \bar{q}_F dF = 0 \end{aligned}$$

Aplicando (IV-9) ao segundo termo da equação acima,

vem:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta T (\rho c \dot{T} - q_v) dv - \int_V \underline{D}^t (\delta T \underline{K}_\ell \underline{DT}) dv + \\ & + \int_V (\underline{D} \delta T)^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) dv + \int_{F_q} \delta T \underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{DT}) dF + \\ & + \int_{F_q} \delta T h(T - T_\infty) dF + \int_{F_q} \delta T \bar{q}_F dF = 0 \end{aligned}$$

Usando agora, o teorema de Gauss ao segundo termo da equação acima, temos:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta T (\rho c \dot{T} - q_v) dv - \int_{F_q} \delta T \underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{D}T) dF + \\ & + \int_V (\underline{D}\delta T)^t \underline{K}_\ell (\underline{D}T) dv + \int_{F_q} \delta T \underline{D}_n^t \underline{K}_\ell (\underline{D}T) dF + \\ & + \int_{F_q} \delta T h(T - T_\infty) dF + \int_{F_q} \delta T \bar{q}_F dF = 0 \end{aligned}$$

Assim, a equação (IV-8) ficará:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta T (\rho c \dot{T} - q_v) dv + \int_V (\underline{D}\delta T)^t \underline{K}_\ell (\underline{D}T) dv + \\ & + \int_{F_q} \delta T h(T - T_\infty) dF + \int_{F_q} \delta T \bar{q}_F dF = 0 \quad (IV-11) \end{aligned}$$

Subdividimos então, o volume "V" em elementos finitos. O campo de temperatura é aproximado nessa sub-região através de funções polinomiais que são expressas por funções de interpolação dos valores desconhecidos nos nós. As funções quadráticas para o elemento isoparamétrico parabólico usado no programa de computador, foram tiradas de [15] e [19]. Aqui nos limitamos a um resumo curto das interdependências básicas.

Considerando:

$$\underset{(1 \times 1)}{\underline{T}}(\bar{x}, t) = \underset{(1 \times m)}{\underline{\underline{w}}} \underset{(m \times 1)}{\underline{T}_e} \quad (\text{IV-12})$$

onde,

$$\underline{\underline{w}} = \underline{w}(\bar{x}) \quad e,$$

$$\underline{T}_e = \underline{T}_e(t)$$

" \underline{T}_e " significa o vetor das temperaturas nos m nós dos elementos e " $\underline{\underline{w}}$ " representa o esquema de interpolação no espaço, que preenche exatamente as condições de contorno da temperatura.

Assim, substituindo a equação (IV-12) na equação (IV-11) e sabendo que $\delta T = \underline{\underline{w}} \delta \underline{T}_e$, ou seja, $\delta T = \delta \underline{T}_e^t \underline{\underline{w}}^t$; temos para um elemento:

$$\begin{aligned} & \int_{ve} \delta \underline{T}_e^t \underline{\underline{w}}^t \rho c \underline{\underline{w}} \dot{\underline{T}}_e - \int_{ve} \delta \underline{T}_e^t \underline{\underline{w}}^t q_v dv + \\ & + \int_{ve} (\underline{D} \underline{\underline{w}} \delta \underline{T}_e)^t \underline{K}_\ell (\underline{D} \underline{\underline{w}} \underline{T}_e) dv + \int_{F_e} \delta \underline{T}_e^t \underline{\underline{w}}^t h (T - T_\infty) dF_e + \\ & + \int_{F_e} \delta \underline{T}_e^t \underline{\underline{w}}^t \bar{q}_F dF_e = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-13})$$

Como $\delta \underline{T}_e^t$ é arbitrário, segue-se que:

$$\begin{aligned}
& \int_{ve} \rho c \underline{w}^t \underline{\dot{w}} \underline{T}_e dv + \int_{ve} (\underline{Dw})^t \underline{K}_\ell (\underline{Dw}) \underline{T}_e dv + \\
& + \int_{F_e} \underline{w}^t h \underline{w} \underline{T}_e dF_e = \int_{ve} \underline{w}^t q_v dv + \\
& + \int_{F_e} \underline{w}^t h T_\infty dF_e - \int_{F_e} \underline{w}^t \bar{q}_F dF_e \quad (IV-14)
\end{aligned}$$

Esta equação \bar{e} , a nível de elemento, a equação discreta de equilíbrio de energia nos nós desconhecidos de temperatura \underline{T}_e , ou seja, as suas derivadas $\underline{\dot{T}}_e$.

Na forma matricial são conduzidas a um sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem, que regem a troca de calor no elemento.

Equilíbrio no elemento:

$$\underline{C}_e \underline{\dot{T}}_e + \underline{K}_e \underline{T}_e = \underline{Q}_e \quad (IV-15)$$

A matriz de Capacidade Térmica \underline{C}_e \bar{e} :

$$\underline{C}_e = \int_{ve} \rho c \underline{w}^t \underline{w} dv \quad (IV-16)$$

A Matriz de Condutividade Térmica \underline{K}_e \bar{e} :

$$\underline{K}_e = \int_{ve} (\underline{Dw})^t \underline{K}_\ell (\underline{Dw}) dv + \int_{F_e} h \underline{w}^t \underline{w} dF \quad (IV-17)$$

O vetor de Cargas Térmicas \underline{Q}_e é:

$$\underline{Q}_e = \int_{V_e} \underline{w}^t q_v dv + \int_{F_e} h \underline{w}^t T_\infty dF - \int_{F_e} \underline{w}^t \bar{q}_F dF \quad (\text{IV-18})$$

A montagem dos elementos em uma estrutura se sucede através da matriz de montagem de Boole¹¹ " \underline{a} ", que define a interdependência entre "m" graus de liberdade do elemento e "n" graus de liberdade da estrutura. Assim:

$$\begin{matrix} \underline{T}_e & = & \underline{a} & \underline{T} \\ (m \times 1) & & (m \times n) & (n \times 1) \end{matrix} \quad (\text{IV-19})$$

Por motivos de invariância a transformação conjugada dá a interdependência das forças motrizes a nível de elemento e de estrutura, ou seja:

$$\begin{matrix} \underline{Q} & = & \underline{a}^t & \underline{Q}_e \\ (n \times 1) & & (n \times m) & (m \times 1) \end{matrix} \quad (\text{IV-20})$$

A troca de calor para toda a estrutura segue, com isso, dessa forma:

$$\underline{C} \dot{\underline{T}} + \underline{K} \underline{T} = \underline{Q} \quad (\text{IV-21})$$

onde,

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \sum_e \underline{a}^t \underline{C}_e \underline{a} \\ \underline{K} &= \sum_e \underline{a}^t \underline{K}_e \underline{a} \\ \underline{Q} &= \sum_e \underline{a}^t \underline{Q}_e \end{aligned} \quad (\text{IV-22})$$

IV.2 - Formulação Variacional

Adotando o seguinte funcional, de acordo com as referências [2], [21]:

$$\begin{aligned} \Omega(T) = & \frac{1}{2} \int_V \left[\rho c T^2 + (\underline{DT})^t \underline{K}_\ell \underline{DT} - 2q_v T + \right. \\ & \left. - 2\rho c T_0 T \right] (\bar{x}, t) dv + \int_F \left[\bar{q}_F n T \right] (\bar{x}, t) dF \end{aligned} \quad (IV-23)$$

onde,

v = volume do meio contínuo

F = contorno

T = $T(\bar{x}, t)$ = campo de temperatura

\bar{x} = coordenada generalizada, $\bar{x} = (x, y, z)$

\underline{K}_ℓ = matriz de condutividades térmicas

ρ = densidade

c = calor específico

q_v = fonte interna de calor

$T_0(\bar{x})$ = distribuição inicial de temperatura

$\bar{q}_F(\bar{x}, t)$ = fluxo de calor prescrito na superfície

n = cosseno diretor da normal à superfície F

t = tempo

\underline{DT} = vetor gradiente de temperaturas

O funcional definido em (IV-23) é do seguinte tipo:

$$\Omega(T) = \int_V I(T, T_{\bar{x}}, x, y, z) dv + \int_F I(T, x, y, z) dF$$

A 1ª variação do funcional, de acordo com [16], será:

$$\begin{aligned} \delta \Omega = \int_V \left[\frac{\partial I}{\partial T} - \frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\partial I}{\partial T_{\bar{x}}} \right) \right] \delta T \, dv + \frac{\partial I}{\partial T_{\bar{x}}} \delta T \Big|_F + \\ + \int_F \frac{\partial I}{\partial T} \delta T \, dF = 0 \end{aligned} \quad (IV-24)$$

Calculando agora, as parcelas da equação (IV-24) e transformando a notação definida acima para a notação usada no trabalho, obtemos:

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \left[\rho c T - q_v - \rho c T_0 \right] + \bar{q}_F n$$

$$\frac{\partial I}{\partial T_{\bar{x}}} = (K_{\ell} \underline{DT}) \quad (IV-25)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left(\frac{\partial I}{\partial T_{\bar{x}}} \right) = \underline{D}^t (K_{\ell} \underline{DT})$$

Substituindo as equações (IV-25) na equação (IV-24),

vem:

$$\delta \Omega = \int_V \left[\rho c T - q_V - \rho c T_0 - \underline{D}^t (\underline{K}_\ell \underline{DT}) \right] \delta T \, dv +$$

$$+ \underline{K}_\ell \underline{DT} + \int_F \bar{q}_F n \delta T \, dF = 0 \quad (\text{IV-26})$$

Usando o teorema de Green na última parcela da equação (IV-26), chegamos a:

$$\int_F \bar{q}_F n \delta T \, dF = \int_V \underline{D}(\bar{q}_F \delta T) \, dv = \bar{q}_F \delta T$$

Assim, a equação (IV-26) fica:

$$\delta \Omega = \int_V \left[\rho c T - q_V - \rho c T_0 - \underline{D}^t (\underline{K}_\ell \underline{DT}) \right] \delta T \, dv +$$

$$+ \left[\underline{K}_\ell \underline{DT} + \bar{q}_F \right] \delta T = 0$$

Como δT é arbitrário, chegamos as seguintes equações:

$$\rho c T - \rho c T_0 - q_V - \underline{D}^t (\underline{K}_\ell \underline{DT}) = 0 \quad (\text{IV-27})$$

e

$$\underline{K}_\ell \underline{DT} + \bar{q}_F = 0 \quad (\text{IV-28})$$

A equação (IV-27) é a equação de Euler-Lagrange para

o funcional proposto, e a equação (IV-28) representa as condições de contorno naturais do problema.

Consideremos agora, a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \left[\rho c T \right] (\bar{x}, t) &= \int_0^t \rho c T(\bar{x}, \tau) d\tau = \\ &= \rho c \left[T(\bar{x}, t) - T_0(\bar{x}) \right] \end{aligned}$$

Derivando a identidade acima em relação a τ e substituindo em (IV-27), chegamos a:

$$\rho c \dot{T} - \underline{D}^t (K_{\ell} \underline{D} T) - q_v = 0 \quad (\text{IV-29})$$

A equação (IV-29) é uma forma usual da equação da condução de calor transiente, portanto o uso do funcional (IV-23), para o problema da condução de calor transiente, é válido.

Usaremos agora, o Método dos Elementos Finitos para a obtenção das soluções aproximadas.

Adotaremos a mesma equação matricial do método de Galerkin, equação (IV-12), para representar a temperatura em qualquer ponto de um elemento:

$$T(\bar{x}, t) = \underline{w}(\bar{x}) \quad \underline{I}_e(t) \quad (\text{IV-30})$$

Substituindo a equação (IV-30) na funcional proposto, chegamos a:

$$\Omega = \int_V \frac{1}{2} \left[\rho c \underline{\underline{w}}_e^T \underline{\underline{w}}_e + (\underline{\underline{Dw}}_e)^t \underline{\underline{K}}_\ell (\underline{\underline{Dw}}_e) + \right. \\ \left. - 2q_v \underline{\underline{w}}_e - 2\rho c \underline{\underline{w}}_0^T \underline{\underline{w}}_e \right] dv + \\ + \int_F \left[\bar{q}_F n \underline{\underline{w}}_e \right] dF$$

Arrumando a expressão acima, temos:

$$\Omega = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho c \underline{\underline{I}}_e^t \underline{\underline{w}}^t \underline{\underline{w}}_e + \frac{1}{2} \underline{\underline{I}}_e^t (\underline{\underline{Dw}})^t (\underline{\underline{Dw}}) \underline{\underline{K}}_\ell \underline{\underline{I}}_e + \right. \\ \left. - \underline{\underline{I}}_e^t q_v \underline{\underline{w}}^t - \underline{\underline{I}}_e^t \rho c \underline{\underline{w}}_0^T \underline{\underline{w}}_e \right] dv + \\ + \int_F \underline{\underline{I}}_e^t \underline{\underline{w}}^t \bar{q}_F n dF \quad (IV-31)$$

Chamando de:

$$\underline{\underline{C}}_e = \int_V \rho c \underline{\underline{w}}^t \underline{\underline{w}} dv \\ \underline{\underline{K}}_e = \int_V (\underline{\underline{Dw}})^t \underline{\underline{K}}_\ell (\underline{\underline{Dw}}) dv \quad (IV-32) \\ \underline{\underline{Q}}_e = \int_V q_v \underline{\underline{w}}^t dv - \int_F \bar{q}_F n \underline{\underline{w}}^t dF$$

A equação (IV-31) ficará então:

$$\Omega = \frac{1}{2} T_e^t \dot{C}_e T_e + \frac{1}{2} T_e^t K_e T_e + \\ - T_e^t C_e T_0 - T_e^t Q_e$$

A 1ª variação da equação acima nos dá:

$$C_e [T_e - T_0] + K_e T_e = Q_e$$

$$C_e \dot{T}_e + K_e T_e = Q_e \quad (\text{IV-33})$$

Incluindo o caso de troca de calor com o meio que cerca o corpo, teremos mais uma parcela para K_e e Q_e . Seja:

$$\bar{q}_h(\bar{x}, t) = h(T - T_\infty)$$

onde:

T_∞ = temperatura do meio

T = temperatura da superfície do corpo

h = coeficiente de transmissão de calor

Este efeito é considerado somando-se a integral de superfície abaixo, à equação (IV-23):

$$\int_F \left[h \left(\frac{1}{2} T - T_\infty \right) T \right] (\bar{x}, t) dF \quad (\text{IV-34})$$

O efeito final da inclusão da equação (IV-34) na ex-pressão do funcional é o seguinte:

$$\underline{K}_e = \int_V (\underline{Dw})^t \underline{K}_\ell (\underline{Dw}) dv + \int_F h \underline{w}^t \underline{w} dF$$

$$\underline{Q}_e = \int_V q_v \underline{w}^t dv - \int_F \bar{q}_F n \underline{w}^t dF +$$

$$+ \int_F \underline{w}^t h T_\infty dF$$

A matriz \underline{C}_e não se altera.

Assim, o sistema de equações diferenciais da condução de calor transiente discretizado espacialmente fica, a nível de elemento, da seguinte forma:

$$\underline{C}_e \dot{\underline{T}}_e + \underline{K}_e \underline{T}_e = \underline{Q}_e$$

onde:

\underline{C}_e = matriz de capacidade térmica

\underline{K}_e = matriz de condutividade térmica

\underline{Q}_e = vetor de cargas térmicas

A nível de estrutura, podemos efetuar a montagem dos elementos através da matriz de "Boole" mostrada no capítulo IV.

1.

CAPÍTULO V

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM DA

ANÁLISE TRANSIENTE DA CONDUÇÃO DE CALOR

Após a discretização espacial por elementos finitos das formulações integrais da condução de calor transiente, o problema consiste agora, na integração numérica no tempo de um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem.

O tratamento para sistemas de equações diferenciais de ordens superiores é equivalente, já que estes são sempre possíveis de serem reduzidos para um sistema de 1ª ordem.

Seja a formulação por elementos finitos do equilíbrio térmico representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\underline{\underline{C}} \dot{\underline{T}} + \underline{\underline{K}} \underline{T} = \underline{Q} \quad (V-1)$$

onde:

$\underline{\underline{C}}$ = matriz de capacidade térmica

$\underline{\underline{K}}$ = matriz de condutividade térmica

\underline{Q} = vetor de cargas térmicas

$\underline{T} = \underline{T}(t)$ = vetor desconhecido das temperaturas nos nós, variando com o tempo (t)

Todos os métodos de integração numérica fazem uso de processos incrementais, os quais obtêm a solução do problema através de uma aproximação, dentro de um determinado intervalo

de tempo, da variação de temperatura. Assim, o sistema de equações diferenciais (V-1) é transformado para a seguinte forma algébrica:

$$\underline{K}^* \underline{T}_{t+\Delta t} = \underline{Q}_p + \underline{Q}_H \quad (V-2)$$

onde:

\underline{K}^* = matriz efetiva

\underline{Q}_p = vetor de cargas térmicas devido à solução particular de (V-1)

\underline{Q}_H = vetor de cargas térmicas devido à solução homogênea de (V-1).

- Solução de Sistemas de Primeira Ordem

Como a matriz \underline{C} do sistema de equações (V-1) é positiva definida, a equação discretizada da condução de calor pode ser normalizada da seguinte forma:

$$\dot{\underline{T}} + \underline{AT} = \underline{P} \quad (V-3)$$

onde:

$$\underline{A} = \underline{C}^{-1} \underline{K}$$

$$\underline{P} = \underline{C}^{-1} \underline{Q}$$

Com as seguintes condições iniciais em $t = t_0$:

$$\underline{T}_0 = \underline{T}(t_0) \quad (V-4)$$

A solução exata desse sistema de primeira ordem é composta de duas componentes: solução homogênea e solução particular da contribuição das forças. Assim:

$$\underline{I}_t = \underbrace{e^{-A(t-t_0)} \underline{I}_0}_{\text{homogênea}} + \underbrace{\int_{t_0}^t e^{-A(t-\Gamma)} \underline{P}(\Gamma) d\Gamma}_{\text{particular}} \quad (V-5)$$

A matriz exponencial e^{-At} é então, expandida numa série de potências de Taylor, da seguinte forma:

$$e^{-At} = \underline{I} - t\underline{A} + \frac{t^2}{2!} \underline{A}^2 - \frac{t^3}{3!} \underline{A}^3 + \dots + \frac{(-t)^n}{n!} \underline{A}^n + \dots \quad (V-6)$$

Esta série converge lentamente para grandes valores de t . Entretanto, nós utilizamos a equação (V-5) na sua forma incremental expressando a solução num tempo $t+\Delta t$ em termos dos valores no início do intervalo de tempo Δt e do atual incremento de carga. Dessa forma a equação (V-5) fica:

$$\underline{I}_{t+\Delta t} = e^{-A \Delta t} \underline{I}_t + e^{-A(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{A\Gamma} \underline{P}(\Gamma) d\Gamma \quad (V-7)$$

A solução acima ainda é exata, pois não foi feita nenhuma aproximação. Pode-se observar que a equação (V-7) contém ainda, um termo exponencial de decaimento e um termo adicional, devido ao carregamento, no atual intervalo de tempo. Porém agora, a matriz exponencial de decaimento da solução homogênea, $e^{-A \Delta t}$, pode ser expandida numa série de potências, a qual converge mais rapidamente devido aos pequenos valores de Δt .

No aspecto computacional, o principal problema é uma avaliação eficiente da expansão por séries (V-6).

Existem duas aproximações básicas para a determinação da matriz exponencial $e^{\underline{A} \Delta t}$. São elas:

- i) Análise Modal, onde a matriz \underline{A} é diagonalizada por decomposição espectral.
- ii) Técnica da Integração Numérica, onde o termo $e^{\underline{A} \Delta t}$ é aproximado truncando-se a série de potências (V-6) após os primeiros termos:

V.1 - Análise Modal

No caso de \underline{C} e \underline{K} serem independentes do tempo e da temperatura, é interessante fazer uma mudança de base na equação (V-1) que ortonormaliza a parte homogênea da equação. Seja então:

$$\underline{\dot{C}}\underline{T} + \underline{K}\underline{T} = \underline{0} \quad (V-8)$$

e

$$\underline{T} = \underline{X}\underline{\theta} \quad (V-9)$$

Supondo a solução da equação (V-8) igual a:

$$\underline{T} = e^{\underline{A}t} \underline{X}$$

A primeira derivada de \underline{T} será:

$$\dot{\underline{I}} = - \underline{\Lambda} e^{-\underline{\Lambda}t} \underline{X}$$

Substituindo a equação acima na equação (V-8), temos:

$$- \underline{C}\underline{\Lambda} e^{-\underline{\Lambda}t} \underline{X} + \underline{K} e^{-\underline{\Lambda}t} \underline{X} = \underline{0}$$

$$\underline{K}\underline{X} = \underline{C}\underline{X}\underline{\Lambda} \quad (V-10)$$

Como $\underline{A} = \underline{C}^{-1}\underline{K}$, a equação (V-10) fica:

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{\Lambda}\underline{X}$$

$$\left| \underline{A} - \underline{\Lambda}\underline{I} \right| \underline{X} = \underline{0} \quad (V-11)$$

A matriz \underline{A} é diagonalizada por decomposição espectral e obtemos então, a matriz espectral do sistema, formada com os autovalores de \underline{A} . Logo:

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{\max}, & \dots, & \lambda_i, & \dots, & \lambda_{\min} \end{bmatrix}$$

Os correspondentes autovetores \underline{X} desacopla o sistema de equações diferenciais (V-1), como está demonstrado abaixo:

Substituindo (V-9) em (V-8), vem:

$$\underline{C}\underline{X}\dot{\underline{\theta}} + \underline{K}\underline{X}\underline{\theta} = \underline{0}$$

Pré-multiplicando por \underline{C}^{-1} , temos:

$$\underline{X}\dot{\underline{\theta}} + \underline{A}\underline{X}\underline{\theta} = \underline{0}$$

Pré-multiplicando agora, por \underline{X}^t , vem:

$$\underline{X}^t \underline{\dot{X}} + \underline{X}^t \underline{A} \underline{X} = \underline{0}$$

como $\underline{A} \underline{X} = \underline{\Lambda} \underline{X}$, temos:

$$\underline{X}^t \underline{\dot{X}} + \underline{X}^t \underline{\Lambda} \underline{X} = \underline{0}$$

E sendo $\underline{\Lambda}$ uma matriz diagonal, podemos simplificar o sistema acima da seguinte maneira:

$$\underline{X}^t \underline{\dot{X}} + \underline{X}^t \underline{\Lambda} \underline{X} = \underline{0}$$

$$\dot{\underline{\theta}} + \underline{\Lambda} \underline{\theta} = \underline{0} \quad (V-12)$$

O sistema de equações (V-12) está portanto, desacoplado, pois $\underline{\Lambda}$ é uma matriz diagonal.

Desse modo, a solução foi reduzida para repetidas integrações de equações simples de 1ª ordem.

Cada modo térmico é controlado pela seguinte expressão:

$$\dot{\theta} + \lambda \theta = f \quad (V-13)$$

A solução final é obtida por superposição das respostas em cada modo.

O esforço computacional para a solução por autovalores pode ser reduzido, na maioria dos problemas de engenharia,

porque a resposta é geralmente obtida através dos modos fundamentais. Assim, o cálculo dos autovalores pode se limitar a alguns modos da matriz espectral.

V.2 - Integração Numérica

No caso de sistemas não lineares, as matrizes \underline{C} e \underline{K} variam com o tempo e a temperatura. Assim, o autovetor \underline{X} da equação (V-10) tem que ser, em geral, ortonormalizado repetidamente para manter o sistema desacoplado.

Repetidos cálculos de autovalores aumenta consideravelmente os custos computacionais. Por este motivo, a Técnica da Integração Numérica é preferida.

Nesta técnica usamos aproximações da matriz exponencial $e^{-\underline{A} \Delta t}$ no intervalo de tempo Δt . Este assunto, será discutido detalhadamente no capítulo seguinte.

CAPÍTULO VI

OPERADORES HERMITIANOS DE INTEGRAÇÃO

Existem várias possibilidades de introduzir expansões polinomiais para aproximar a dependência do tempo. Por exemplo: uma série de operadores de tempo de várias ordens podem ser desenvolvidos de acordo com a expansão polinomial (expansões linear, quadrática, cúbica, etc...) e de acordo com o tipo de interpolação polinomial (Métodos Lagrangeanos ou Hermitianos). Entretanto, no sentido de manter a ordem das matrizes \underline{C} e \underline{K} do sistema inicial para a matriz \underline{K}^* do sistema efetivo, será usada interpolação Hermitiana para $\underline{I} = \underline{I}(t)$, já que os nós estão localizados no início e no final do intervalo de tempo Δt e porque as derivadas nodais das expansões de alta ordem $\dot{\underline{I}}$, $\ddot{\underline{I}}$, etc..., são rapidamente expressas em termos dos valores \underline{I} da função. Usando a equação de equilíbrio (V-1), nós chegamos, para sistemas lineares, ao seguinte:

$$\dot{\underline{I}} = -\underline{A}\underline{I} + \underline{P} \quad \text{e} \quad \ddot{\underline{I}} = -\underline{A}\dot{\underline{I}} + \underline{P} \quad (\text{VI-1})$$

Para cada ordem, a Interpolação Hermitiana reduz o sistema diferencial de primeira ordem (V-1) a um sistema $(N \times N)$ de equações algébricas análogo a equação (V-2).

Ao contrário, a Interpolação Lagrangeana aumenta a ordem das equações algébricas por causa dos nós adicionais dentro do intervalo de tempo Δt , a não ser que sejam aplicadas técnicas de condensação dos nós [16], [25]. Assim, este caso não será

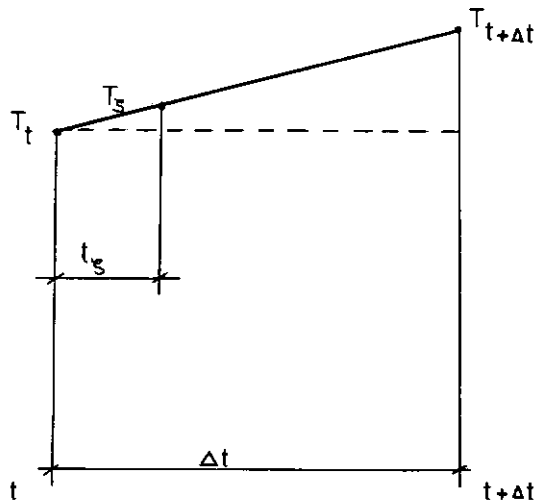
mais considerado.

No caso mais simples n3s expandimos as temperaturas nodais num polin3mio Hermitiano no intervalo de tempo Δt :

$$\tilde{T}_{\tilde{\zeta}} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}_t \\ \tilde{T}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-2})$$

As fun33es de interpola33o w_1 e w_2 descrevem a varia33o do tempo no intervalo normalizado $[0, 1]$.

VI.1 - Expans3o Linear



$$0 \leq t_{\zeta} \leq \Delta t \quad , \quad \zeta = \frac{t_{\zeta}}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t_{\zeta}} = \frac{1}{\Delta t}$$

FIG. VI-1 - DISTRIBUI33O LINEAR DE TEMPERATURA EM $[t, t + \Delta t]$.

De acordo com a figura VI-1, temos:

$$T_{\zeta} = T_t \quad \text{qd?} \quad \zeta = 0$$

$$T_{\zeta} = T_{t+\Delta t} \quad \text{qd?} \quad \zeta = 1$$

A seguinte expressão satisfaz as equações acima:

$$T_{\zeta} = (1 - \zeta) T_t + \zeta T_{t+\Delta t}$$

Assim, a expansão linear do algoritmo Hermitiano acarreta um polinômio linear para os valores escolhidos T_t , $T_{t+\Delta t}$ com as seguintes funções de interpolação:

$$w_1(\zeta) = 1 - \zeta$$

$$w_2(\zeta) = \zeta \quad (\text{VI-3})$$

Este caso corresponde a família dos métodos lineares, nos quais a temperatura nodal varia linearmente dentro do intervalo de tempo Δt .

Substituindo as equações (VI-3) na equação (VI-2) chegamos a:

$$\tilde{T}_{\zeta} = [1 - \zeta, \zeta] \begin{bmatrix} \tilde{T}_t \\ \tilde{T}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-4})$$

A primeira derivada, em relação a t_{ζ} , da equação acima vale:

$$\dot{\tilde{T}}_{\tilde{\zeta}} = \frac{\partial \tilde{T}_{\tilde{\zeta}}}{\partial \tilde{\zeta}} \cdot \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t_{\tilde{\zeta}}}$$

$$\dot{\tilde{T}}_{\tilde{\zeta}} = \frac{1}{\Delta t} [-1, 1] \begin{bmatrix} \tilde{T}_t \\ \tilde{T}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-5})$$

Sendo a equação homogênea do equilíbrio térmico igual

a:

$$\underline{\tilde{C}} \dot{\tilde{T}}_{\tilde{\zeta}} + \underline{\tilde{K}} \tilde{T}_{\tilde{\zeta}} = \underline{0}$$

Substituindo agora, as equações (VI-4) e (VI-5) na equação acima, temos:

$$\underline{\tilde{C}} \cdot \frac{\tilde{T}_{t+\Delta t} - \tilde{T}_t}{\Delta t} + \underline{\tilde{K}} [(1 - \zeta) \tilde{T}_t + \zeta \tilde{T}_{t+\Delta t}] = \underline{0}$$

$$\left[\frac{\underline{\tilde{C}}}{\Delta t} + \underline{\tilde{K}} \zeta \right] \tilde{T}_{t+\Delta t} = \left[\frac{\underline{\tilde{C}}}{\Delta t} - (1 - \zeta) \underline{\tilde{K}} \right] \tilde{T}_t$$

Multiplicando toda a equação por $\underline{\tilde{C}}^{-1}$ e sabendo-se que $\underline{\tilde{C}}^{-1} \underline{\tilde{K}} = \underline{\tilde{A}}$, chegamos a:

$$\left[\underline{\tilde{I}} + \Delta t \zeta \underline{\tilde{A}} \right] \tilde{T}_{t+\Delta t} = \left[\underline{\tilde{I}} - (1 - \zeta) \Delta t \underline{\tilde{A}} \right] \tilde{T}_t \quad (\text{VI-6})$$

onde $\underline{\tilde{I}}$ = matriz identidade.

Chamando:

$$\alpha_1 = \frac{w_2}{\dot{w}_2} = \zeta \quad \text{e} \quad \beta_1 = - \frac{w_1}{\dot{w}_2} = \zeta - 1$$

onde \dot{w}_2 é a derivada de w_2 em relação a t_ζ .

A equação (VI-6) fica então:

$$\left[\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A} \right] \underline{T}_{t+\Delta t} = \left[\underline{I} + \beta_1 \Delta t + \underline{A} \right] \underline{T}_t \quad (\text{VI-7})$$

A matriz efetiva do sistema \underline{K}_1^* é definida pelo lado esquerdo da equação (VI-7). Assim:

$$\underline{K}_1^* = \left[\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A} \right] \quad (\text{VI-7a})$$

O vetor de cargas iniciais \underline{Q}_H é definido pelo lado direito da mesma equação:

$$\underline{Q}_H = \left[\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{A} \right] \underline{T}_t \quad (\text{VI-7b})$$

Valores particulares de ζ colocam a equação (VI-7) num específico instante dentro do intervalo de tempo Δt . Escolhendo $\zeta = 0, 1, 1/2$ ou $2/3$ chega-se aos conhecidos algoritmos Forward, Backward, Trapezoidal e Galerkin respectivamente.

Para a parte da solução particular da equação do equilíbrio, $\underline{C}\dot{\underline{T}}_\zeta + \underline{K}\underline{T}_\zeta = \underline{Q}_\zeta$, assumiremos que o vetor $\underline{Q}_\zeta(t)$ pode ser idealizado por expansão linear. Assim, num dado intervalo de tempo Δt o vetor vale:

$$\underline{Q}_\zeta = \left[w_1, w_2 \right] \begin{bmatrix} \underline{Q}_t \\ \underline{Q}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-8})$$

onde w_1, w_2 são as funções de interpolação linear:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 1 - \zeta \\ w_2 &= \zeta \end{aligned} \right\} 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (\text{VI-8a})$$

Assim, a parte não homogênea é rapidamente deduzida e o vetor de cargas \underline{Q}_p é definido da seguinte maneira:

$$\underline{Q}_p = \begin{bmatrix} -\beta_1 \Delta t, & \alpha_1 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{P}_t \\ \underline{P}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (\text{VI-9})$$

Onde \underline{P}_t e $\underline{P}_{t+\Delta t}$ valem:

$$\begin{aligned} \underline{P}_t &= \underline{C}^{-1} \underline{Q}_t \\ \underline{P}_{t+\Delta t} &= \underline{C}^{-1} \underline{Q}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{VI-9a})$$

No caso de $\underline{P}_t = \underline{P}_{t+\Delta t} = \underline{P}_t$ o valor de \underline{Q}_p simplifica:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_p &= \underline{P}_t \Delta t + (\underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{P}_t) \Delta t \zeta \\ \underline{Q}_p &= \underline{P}_t \Delta t \end{aligned} \quad (\text{VI-10})$$

Finalmente, chegamos ao seguinte sistema de equações algébricas lineares de acordo com (V-2):

$$\begin{aligned} \left[\underline{I} + \alpha_1 \Delta t \underline{A} \right] \underline{I}_{t+\Delta t} &= \left[\underline{I} + \beta_1 \Delta t \underline{A} \right] \underline{I}_t + \\ &+ \Delta t \underline{P}_t + (\underline{P}_{t+\Delta t} - \underline{P}_t) \Delta t \alpha_1 \end{aligned} \quad (\text{VI-11})$$

A classe dos métodos lineares, estudadas neste capítulo, transformam a equação (V-3) na seguinte forma algébrica:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{t+\Delta t} = & \left[\underline{I} + \zeta \Delta t \underline{A} \right]^{-1} \left[\underline{I} - (1-\zeta) \Delta t \underline{A} \right] \underline{I}_t + \\ & + \left[\underline{I} + \zeta \Delta t \underline{A} \right]^{-1} \left[\Delta t (1-\zeta) \underline{P}_t + \Delta t \zeta \underline{P}_{t+\Delta t} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI-12})$$

Este operador corresponde a uma aproximação racional para $e^{-\underline{A}\Delta t}$ da seguinte forma:

$$R_1^\zeta = \left[\underline{I} + \zeta \Delta t \underline{A} \right]^{-1} \left[\underline{I} - (1-\zeta) \Delta t \underline{A} \right] \quad (\text{VI-13})$$

Na equação (VI-13) ambas as parcelas são polinômios lineares em $\zeta[0, 1]$.

A tabela VI-1 abaixo nos mostra os já conhecidos operadores lineares para $\zeta = 0, 1, 1/2$ e $2/3$. Para cada operador são mostradas a aproximação racional e a sua correspondente expansão em série de binômios.

algoritmo	ζ	aproximação racional	expansão em série
Forward	0	$R_1^0 = \underline{I} - \Delta t \underline{A}$	$\underline{I} - \Delta t \underline{A}$
Backward	1	$R_1^1 = [\underline{I} + \Delta t \underline{A}]^{-1}$	$\underline{I} - \Delta t \underline{A} + \Delta t^2 \underline{A}^2$
Trapezoidal	1/2	$R_1^{1/2} = [\underline{I} + (\Delta t/2) \underline{A}]^{-1} [\underline{I} - (\Delta t/2) \underline{A}]$	$\underline{I} - \Delta t \underline{A} + (\Delta t^2/2) \underline{A}^2 - (\Delta t^3/4) \underline{A}^3 + \dots$
Galerkin	2/3	$R_1^{2/3} = [\underline{I} + (2\Delta t/3) \underline{A}]^{-1} [\underline{I} - (\Delta t/3) \underline{A}]$	$\underline{I} - \Delta t \underline{A} + (2\Delta t^2/3) \underline{A}^2 - \dots$

TABELA VI-1 - Aproximações Lineares da Matriz Exponencial $e^{-\underline{A}\Delta t}$.

APRÓXIMACÕES LINEARES DA FUNÇÃO EXP. DE DECAIMENTO

○ FORWARD - ZETA=0

▲ TRAPEZOIDAL - ZETA=1/2

+ GALERKIN - ZETA=0.667

× BACKWARD - ZETA=1

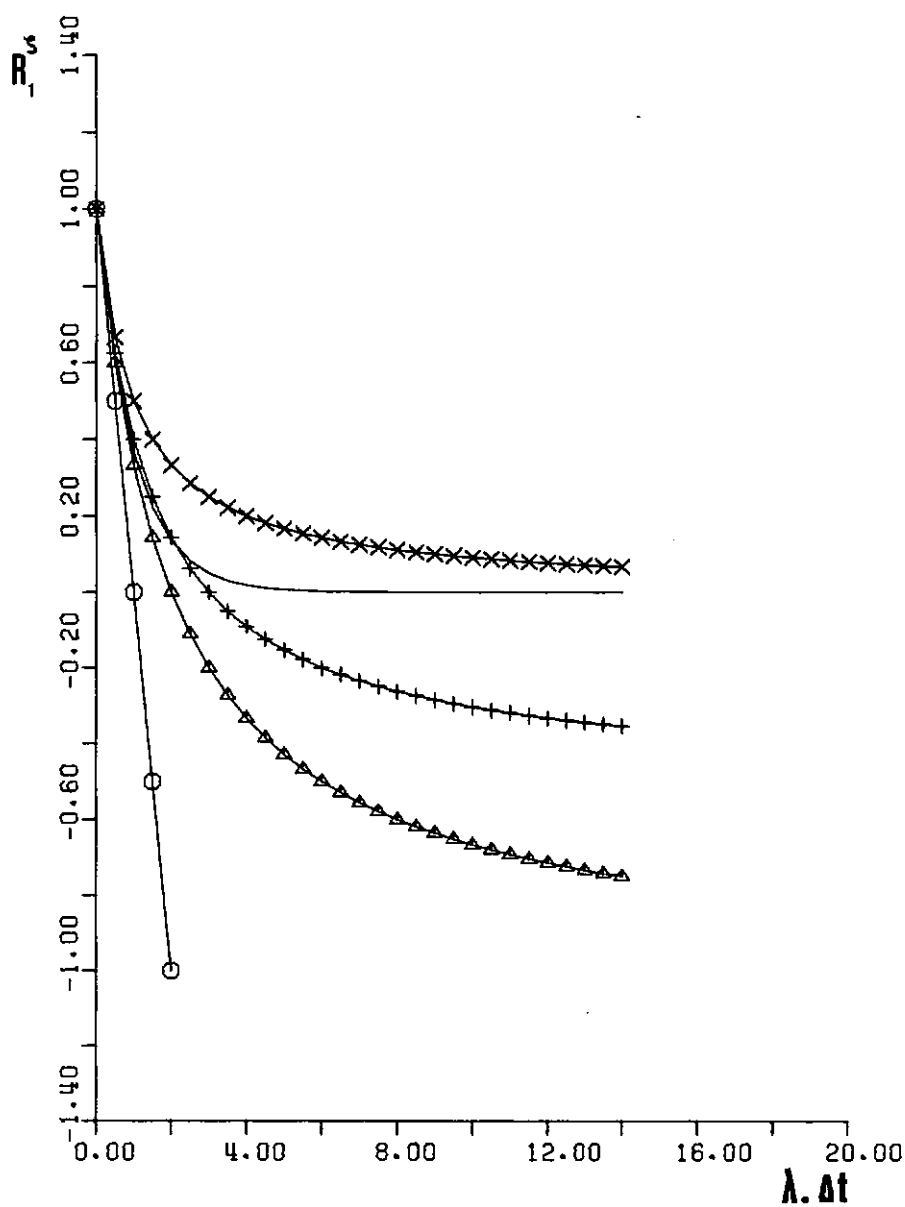


FIG. VI-2

Seja agora o escalar correspondente da equação (VI-13):

$$R_1^\zeta = [1 + \zeta \Delta t \lambda]^{-1} [1 - (1-\zeta) \Delta t \lambda] \quad (\text{VI-14})$$

Para os algoritmos da tabela VI-1, a figura VI-2 ilustra o comportamento dos diferentes operadores quando comparados com a curva exata de $e^{-\lambda \Delta t}$, a qual, no gráfico é representada por uma linha cheia.

Estudemos agora algumas características desses quatro operadores.

a) Precisão

Comparando as expansões em série dos operadores da tabela VI-1 com os termos da expansão de Taylor para $e^{-A\Delta t}$, equação (V-6), verificamos que a Regra Trapezoidal (ou Método de Crank-Nicolson) apresenta precisão de segunda ordem, enquanto que os outros operadores apresentam uma precisão de primeira ordem.

Esta precisão contudo, é considerada apenas nas vizinhanças da origem, como mostra a figura VI-2. Isto é, para intervalos de tempo, tais que:

$$R_1^\zeta > 0 \quad \text{ou} \quad \Delta t \frac{A}{\lambda} < 1.$$

Para grandes intervalos de tempo, considerações sobre a estabilidade controla o comportamento dos algoritmos, como veremos a seguir.

b) Estabilidade

Para grandes intervalos de tempo, isto é, $\lambda \Delta t \rightarrow \infty$, o método Forward ($\zeta=0$) apresenta comportamento instável ($R_1^0 \rightarrow \infty$), enquanto que os Métodos Backward, Regra Trapezoidal e Galerkin não amplificam a condição inicial, ou seja, apresentam estabilidade absoluta (ou estabilidade-A):

$$|R_1^\zeta| \leq 1 \quad \text{para} \quad 0 \leq \Delta t \leq \infty$$

Na realidade, o operador Backward ($\zeta=1$) se aproxima de zero quando Δt tende a infinito. Definimos então, estabilidade-L como sendo:

$$R_1^1 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \Delta t \rightarrow \infty$$

A Regra trapezoidal satisfaz a relação $R_1^{1/2} \rightarrow -1$ quando $\Delta t \rightarrow \infty$ e o método de Galerkin mostra provavelmente a melhor aproximação média para todo o regime de $\lambda \Delta t$.

Na solução de sistemas rígidos, onde $\lambda_{\max}^A / \lambda_{\min}^A$ possui várias ordens de grandeza, o intervalo de tempo crítico para os algoritmos condicionalmente estáveis é dado por: $|R_1^\zeta| \leq 1$, onde chegamos aos algoritmos com $0 \leq \zeta < 1/2$, como demonstrado abaixo:

$$-1 \leq R_1^\zeta = [1 + \zeta \Delta t \lambda]^{-1} [1 - (1-\zeta)\Delta t \lambda] \leq 1$$

1ª condição: $R_1^\zeta \leq 1$

$$1 - (1-\zeta)\Delta t \lambda \leq 1 + \zeta \Delta t \lambda$$

$$-\Delta t \lambda + \zeta \Delta t \lambda - \zeta \Delta t \lambda \leq 0$$

$$\Delta t \lambda \geq 0$$

2ª condição: $R_1^\zeta \geq -1$

$$-1 - \zeta \Delta t \lambda \leq 1 - \Delta t \lambda + \zeta \Delta t \lambda$$

$$-2 + \Delta t \lambda - 2\zeta \Delta t \lambda \leq 0$$

$$\Delta t \lambda (1 - 2\zeta) \leq 2$$

$$\Delta t \lambda (2\zeta - 1) \geq -2$$

Como $\Delta t \cdot \lambda$ é qualquer ≥ 0 , devemos ter:

$$2\zeta - 1 \geq 0 \rightarrow \zeta \geq 1/2$$

Em particular para o método Forward temos que:

$$\Delta t \lambda (2 \times 0 - 1) \geq -2$$

$$-\Delta t \lambda \geq -2$$

$$\Delta t \lambda \leq 2$$

$$\Delta t_{\text{crítico}} < \frac{2}{\lambda_{\text{max}}}$$

c) Comportamento Oscilatório

A estabilidade dos algoritmos incondicionalmente estáveis, não significa necessariamente, que ocorrerã soluções suas e com boa precisão. De fato, todos os algoritmos que possuem curvas para R_1^ζ que ultrapassem o eixo horizontal $0 - \lambda \cdot \Delta t$ (fig. VI-2), tendem a um comportamento oscilatório para intervalos de tempo Δt , tais que: $R_1^\zeta < 0$. Assim, a regra trapezoidal é numericamente sensível para $\Delta t > 2/\lambda_{\max}$ e o operador de Galerkin para $\Delta t > 3/\lambda_{\max}$. Dos operadores lineares, somente o algoritmo Backward permanece positivo ($R_1^\zeta > 0$) para qualquer $\lambda \cdot \Delta t$, e assim garante um comportamento não oscilatório embora sub-estimando a resposta.

- Conclusões

Por essas considerações concluimos que comportamento oscilatório e precisão são propriedades opostas dos operadores de tempo. Nos casos em que queremos assegurar uma boa precisão para a solução, no regime fundamental $\lambda \rightarrow \lambda_{\min}$, devemos usar a Regra Trapezoidal ($\zeta = 1/2$) que apresenta a maior precisão dentre os métodos lineares. Contudo, para modos maiores, a escolha estaria restrita por causa de seu comportamento oscilatório para $\Delta t > 2/\lambda_{\max}$.

Esta é a principal razão da grande popularidade do algoritmo Backward o qual, é geralmente usado apesar de não alcançar uma boa precisão.

VI.2 - Expansão Cúbica

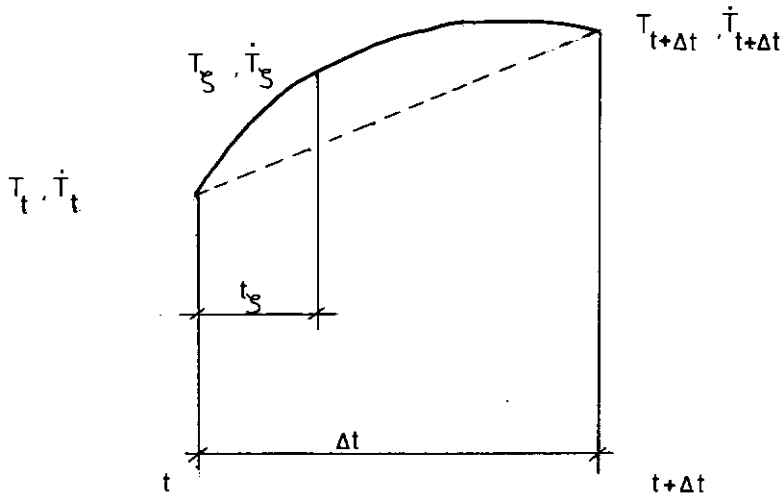


FIG. VI-3 - DISTRIBUIÇÃO CÚBICA DA TEMPERATURA EM $[t, t+\Delta t]$

Um polinômio completo do 3º grau em relação ao tempo seria:

$$T(t) = a_1 + a_2 t_\zeta + a_3 t_\zeta^2 + a_4 t_\zeta^3 \quad (\text{VI-15})$$

De acordo com a figura VI-3 seria aplicado ao polinômio as seguintes condições:

$$T(t_\zeta=0) = T_t \quad (\text{VI-16a})$$

$$T(t_\zeta=\Delta t) = T_{t+\Delta t} \quad (\text{VI-16b})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t_\zeta}(t_\zeta=0) = \dot{T}_t \quad (\text{VI-16c})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t_\zeta}(t_\zeta=\Delta t) = \dot{T}_{t+\Delta t} \quad (\text{VI-16d})$$

Aplicando (VI-16) ao polinômio (VI-15) vem:

$$a_1 = T_t \quad (\text{VI-17a})$$

$$a_2 = \dot{T}_t \quad (\text{VI-17b})$$

$$a_3 = \frac{3}{\Delta t^2}(T_{t+\Delta t} - T_t) - \frac{1}{\Delta t}(2\dot{T}_t + \dot{T}_{t+\Delta t}) \quad (\text{VI-17c})$$

$$a_4 = \frac{2}{\Delta t^3}(T_t - T_{t+\Delta t}) + \frac{1}{\Delta t^2}(\dot{T}_t + \dot{T}_{t+\Delta t}) \quad (\text{VI-17d})$$

Substituindo os valores (VI-17) para a_1 , a_2 , a_3 e a_4 em (VI-15) e desprezando os termos de alta ordem para Δt , chegamos a:

$$T_\zeta = w_1 T_t + \Delta t w_1' \dot{T}_t + w_2 T_{t+\Delta t} + \Delta t w_2' \dot{T}_{t+\Delta t} \quad (\text{VI-18})$$

onde,

$$w_1(\zeta) = 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3 \quad (\text{VI-19a})$$

$$\Delta t w_1'(\zeta) = \Delta t(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3) \quad (\text{VI-19b})$$

$$w_2(\zeta) = 3\zeta^2 - 2\zeta^3 \quad (\text{VI-19c})$$

$$\Delta t w_2'(\zeta) = \Delta t(-\zeta^2 + \zeta^3) \quad (\text{VI-19d})$$

A expansão Hermitiana de ordem dois acarreta um polinômio cúbico para os valores de T_t e $T_{t+\Delta t}$, assim como para suas primeiras derivadas \dot{T}_t e $\dot{T}_{t+\Delta t}$, com as funções de interpolação

(VI-19).

Matricialmente, podemos escrever a equação (VI-18) da seguinte maneira:

$$\underline{T}_{\zeta} = \begin{bmatrix} w_1, \Delta t w_1', w_2, \Delta t w_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{T}_t \\ \dot{\underline{T}}_t \\ \underline{T}_{t+\Delta t} \\ \dot{\underline{T}}_{t+\Delta t} \end{bmatrix}$$

Diferenciando a equação acima, temos:

$$\dot{\underline{T}}_{\zeta} = \frac{\partial \underline{T}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \underline{T}_t + \Delta t \dot{w}_1' \dot{\underline{T}}_t + \dot{w}_2 \underline{T}_{t+\Delta t} + \Delta t \dot{w}_2' \dot{\underline{T}}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \times \frac{1}{\Delta t} \quad (\text{VI-20})$$

Agora, substituindo os valores \underline{T}_{ζ} e $\dot{\underline{T}}_{\zeta}$ na equação homogênea do equilíbrio térmico, $\dot{\underline{T}} + \underline{A}\underline{T} = \underline{0}$, e, sabendo-se que $\dot{\underline{T}} = -\underline{A}\underline{T}$, chegamos a:

$$\begin{aligned} & \left[\underline{T} + \frac{\dot{w}_2' - w_2}{w_2} \Delta t \underline{A} - \frac{w_2'}{w_2} \Delta t^2 \underline{A}^2 \right] \underline{T}_{t+\Delta t} = \\ & = \left[- \frac{\dot{w}_1}{w_2} \underline{T} + \frac{\dot{w}_1' - w_1}{w_2} \Delta t \underline{A} + \frac{w_1'}{w_2} \Delta t^2 \underline{A}^2 \right] \underline{T}_t \end{aligned} \quad (\text{VI-21})$$

Chamando:

$$\alpha_3 = \frac{\dot{w}_2' - w_2}{\dot{w}_2}$$

$$\beta_3 = \frac{\dot{w}_1' - w_1}{\dot{w}_2}$$

$$\gamma_3 = - \frac{w_2'}{\dot{w}_2}$$

$$\delta_3 = \frac{w_1'}{\dot{w}_2}$$

e sabendo que: $-\frac{\dot{w}_1'}{\dot{w}_2} = 1$, a equação (VI-21) fica:

$$\left[\underline{I} + \alpha_3 \Delta t \underline{A} + \gamma_3 \Delta t^2 \underline{A}^2 \right] \underline{T}_{t+\Delta t} = \left[\underline{I} + \beta_3 \Delta t \underline{A} + \delta_3 \Delta t^2 \underline{A}^2 \right] \underline{T}_t \quad (\text{VI-22})$$

Faremos agora, uma interpolação linear para obtermos a parte não homogênea da equação do equilíbrio térmico no instante t_ζ , definida como:

$$\underline{C} \dot{\underline{T}}_\zeta + \underline{K} \underline{T}_\zeta = \underline{Q}_\zeta$$

Substituindo os valores de \underline{T}_ζ e $\dot{\underline{T}}_\zeta$ das equações (VI-18) e (VI-20) respectivamente, na equação do equilíbrio térmico, chegamos a:

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\underline{C}}\dot{\underline{w}}_2 + \Delta t \underline{K}\dot{\underline{w}}_2, \Delta t \dot{\underline{C}}\dot{\underline{w}}_2' + \underline{K}\Delta t^2 \dot{\underline{w}}_2' \right] \begin{bmatrix} \underline{T}_{t+\Delta t} \\ \dot{\underline{T}}_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \\ & = - \left[\dot{\underline{C}}\dot{\underline{w}}_1 + \Delta t \underline{K}\dot{\underline{w}}_1, \Delta t \dot{\underline{C}}\dot{\underline{w}}_1' + \Delta t^2 \underline{K}\dot{\underline{w}}_1' \right] \begin{bmatrix} \underline{T}_t \\ \dot{\underline{T}}_t \end{bmatrix} + \Delta t \underline{Q}_\zeta \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $\dot{\underline{T}} = -\underline{A}\underline{T} + \underline{P}_\zeta$ na equação acima, vem:

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\underline{w}}_2 \underline{C} + (\dot{\underline{w}}_2' - \underline{w}_2) \Delta t \underline{K} - \Delta t^2 \underline{w}_2' \underline{K} \underline{A} \right] \underline{T}_{t+\Delta t} = \\ & = \left[-\dot{\underline{w}}_1 \underline{C} + (\dot{\underline{w}}_1' - \underline{w}_1) \Delta t \underline{K} + \Delta t^2 \underline{w}_1' \underline{K} \underline{A} \right] \underline{T}_t - \\ & - (\Delta t \dot{\underline{w}}_2' \underline{C} + \Delta t^2 \underline{w}_2' \underline{K}) \underline{P}_{t+\Delta t} - (\Delta t \dot{\underline{w}}_1' \underline{C} + \\ & + \Delta t^2 \underline{w}_1' \underline{K}) \underline{P}_t + \Delta t \underline{Q}_\zeta \end{aligned}$$

Prē-multiplicando agora, esta equação por $\underline{C}^{-1} \cdot \frac{1}{\dot{\underline{w}}_2}$, chegamos a:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_P & = - \left(\Delta t \frac{\dot{\underline{w}}_2'}{\dot{\underline{w}}_2} + \Delta t^2 \frac{\underline{w}_2'}{\dot{\underline{w}}_2} \underline{A} \right) \underline{P}_{t+\Delta t} - \\ & - \left(\Delta t \frac{\dot{\underline{w}}_1'}{\dot{\underline{w}}_2} + \Delta t^2 \frac{\underline{w}_1'}{\dot{\underline{w}}_2} \underline{A} \right) \underline{P}_t + \frac{\Delta t}{\dot{\underline{w}}_2} \underline{C}^{-1} \underline{Q}_\zeta \end{aligned}$$

$$\text{mas, } \begin{cases} \frac{\dot{w}_2'}{\dot{w}_2} \equiv -\gamma_3 \\ \frac{\dot{w}_1'}{\dot{w}_2} = \delta_3 \\ \tilde{C}^{-1} \tilde{Q}_\zeta = P_\zeta \end{cases}$$

Assim o valor de \tilde{Q}_p fica:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_p = & - \left(\Delta t \frac{\dot{w}_2'}{\dot{w}_2} - \Delta t^2 \gamma_3 A \right) P_{t+\Delta t} - \left(\Delta t \frac{\dot{w}_1'}{\dot{w}_2} + \right. \\ & \left. + \Delta t^2 \delta_3 A \right) P_t + \frac{\Delta t}{\dot{w}_2} P_\zeta \end{aligned} \quad (\text{VI-23})$$

Fazendo agora uma aproximação linear para P_ζ temos:

$$P_\zeta = (1-\zeta)P_t + \zeta P_{t+\Delta t}$$

mas:

$$\begin{cases} 1 - \zeta = w_1 - w_1' - w_2' \\ \zeta = w_2 + w_1' + w_2' \end{cases}$$

Logo,

$$P_\zeta = (w_1 - w_1' - w_2')P_t + (w_2 + w_1' + w_2')P_{t+\Delta t} \quad (\text{VI-24})$$

Substituindo a equação (VI-24) na equação (VI-23), chegamos a:

$$\begin{aligned} Q_p = & \left[(\alpha_3 + \delta_3 - \gamma_3) \Delta t \underline{I} + \gamma_3 \Delta t^2 \underline{A} \right] \underline{P}_{t+\Delta t} + \\ & + \left[(-\beta_3 - \delta_3 + \gamma_3) \Delta t \underline{I} - \delta_3 \Delta t^2 \underline{A} \right] \underline{P}_t \end{aligned} \quad (VI-25)$$

No caso de $\underline{P}_t = \underline{P}_{t+\Delta t} = \underline{P}_t$, Q_p simplifica para:

$$Q_p = \left[\Delta t \underline{I} + (\gamma_3 - \delta_3) \Delta t^2 \underline{A} \right] \underline{P}_t \quad (VI-26)$$

Finalmente, chegamos ao seguinte sistema de equações algébricas lineares de acordo com (V-2):

$$\begin{aligned} \left[\underline{I} + \alpha_3 \Delta t \underline{A} + \gamma_3 \Delta t^2 \underline{A}^2 \right] \underline{I}_{t+\Delta t} = & \left[\underline{I} + \beta_3 \Delta t \underline{A} + \delta_3 \Delta t^2 \underline{A}^2 \right] \underline{I}_t + \\ + \left[(\alpha_3 + \delta_3 - \gamma_3) \Delta t \underline{I} + \gamma_3 \Delta t^2 \underline{A} \right] \underline{P}_{t+\Delta t} + & \left[(-\beta_3 - \delta_3 + \gamma_3) \Delta t \underline{I} + \right. \\ & \left. - \delta_3 \Delta t^2 \underline{A} \right] \underline{P}_t \end{aligned} \quad (VI-27)$$

Da mesma forma que na classe dos métodos lineares, notamos agora que valores particulares de ζ coloca de novo a equação (VI-22) em pontos específicos do intervalo de tempo Δt .

Para um único modo térmico temos a seguinte aproximação racional cúbica para $e^{-\lambda \Delta t}$:

$$R_3^\zeta = \frac{1 + \beta_3 \quad \Delta t \quad \lambda + \delta_3 \quad \Delta t^2 \quad \lambda^2}{1 + \alpha_3 \quad \Delta t \quad \lambda + \gamma_3 \quad \Delta t^2 \quad \lambda^2} \quad (\text{VI-28})$$

A figura VI-4 nos mostra o comportamento dos algoritmos Backward, Forward, Regra Trapezoidal e Galerkin, expansão cúbica, em comparação à curva de $e^{-\lambda \Delta t}$.

Podemos notar, a alta precisão da expansão cúbica em relação aos métodos tradicionais lineares da figura VI-2. O algoritmo para $\zeta = 1/2$ (Regra Trapezoidal) corresponde à máxima precisão dentre as expansões hermitianas cúbicas, já que a expansão em série associada de $R_3^{1/2}$, apresenta uma precisão de 4ª ordem quando comparada à expansão em série de Taylor para $e^{-\lambda \Delta t}$; como vemos a seguir:

$$R_3^{1/2} = \frac{1 - \frac{1}{2} \lambda \Delta t + \frac{1}{12} \lambda^2 \Delta t^2}{1 + \frac{1}{2} \lambda \Delta t + \frac{1}{12} \lambda^2 \Delta t^2}$$

A expansão em série associada é:

$$R_3^{1/2} = 1 - \lambda \Delta t + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta t^2 - \frac{1}{6} \lambda^3 \Delta t^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 \Delta t^4 - \frac{1}{120} \lambda^5 \Delta t^5 + \dots$$

A regra trapezoidal, expansão cúbica, corresponde ao método de Crank-Nicolson de ordem superior.

Quanto ao comportamento oscilatório, verificamos pela figura VI-4 que tanto a regra trapezoidal quanto o operador de Galerkin não apresentam oscilação, já que $R_3^{1/2}$ e $R_3^{0.629}$ são maiores que zero para todo o regime $\lambda \Delta t$, além de serem incondicio-

nalmente estáveis.

De novo, o método Backward de 3ª ordem, satisfaz a estabilidade-L, isto é, $R_3^1 \rightarrow 0$ quando $\Delta t \rightarrow \infty$, além de ser incondicionalmente estável. Apesar disto, apresenta um comportamento oscilatório para $\lambda \Delta t > 3$ que leva a valores de R_3^1 menores que zero, como mostra a figura (VI-4).

O limite de R_3^1 quando ζ se aproxima de 1, nos dá:

$$R_3^1 = \frac{1 - \frac{1}{3} \lambda \Delta t}{1 + \frac{2}{3} \lambda \Delta t + \frac{1}{6} \lambda^2 \Delta t^2}$$

Para $R_3^1 > 0 \rightarrow \lambda \Delta t \leq 3$

Aspectos computacionais das expansões linear e cúbica para os diversos operadores serão mostrados no próximo capítulo.

APROXIMAÇÕES CUBICAS DA FUNCAO EXP. DE DECAIMENTO

- FORWARD - ZETA=0
- △ TRAPEZOIDAL - ZETA=1/2
- + GALERKIN - ZETA=0.629
- × BACKWARD - ZETA=1

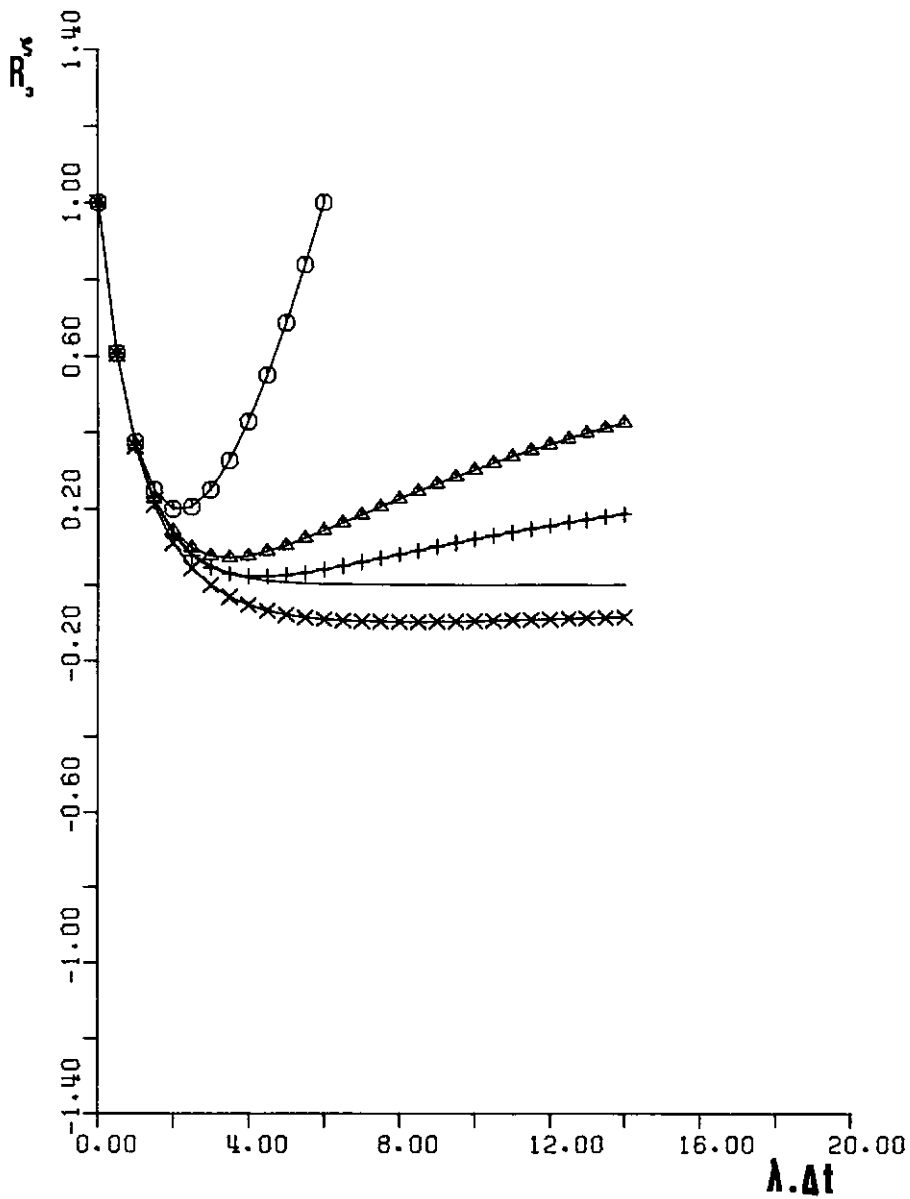


FIG. VI-4

CAPÍTULO VII

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo serão mostrados alguns exemplos ilustrativos e de aplicação prática, que serviram como base para estudo da eficiência computacional dos Algoritmos Hermitianos.

Dentre as propriedades dos algoritmos verificou-se: precisão, estabilidade e comportamento oscilatório (ou não). Os aspectos computacionais estudados foram: intervalo de tempo utilizado, tempo de processamento e custo total (USC do tempo de processamento + USC de entrada e saída + USC de memória utilizada). Para um mesmo operador, as expansões linear e cúbica foram comparadas.

O exemplo número 1 é um caso de fonte interna de calor e ilustra muito bem as propriedades dos diversos operadores hermitianos (lineares e cúbicos). Neste exemplo foi usado o Método de Rayleigh para reduzir o sistema a um grau de liberdade.

Os exemplos 2 a 6 foram resolvidos através do programa "HEAT", desenvolvido durante a tese. Este programa resolve problemas de condução de calor transiente em placas, usando o elemento isoparamétrico parabólico para discretização no espaço e os algoritmos hermitianos de integração no tempo. O "manual do usuário", para o programa HEAT, está descrito no apêndice A.

Os casos de fonte interna de calor, fluxo prescrito de calor e troca de calor com o meio ambiente foram ilustrados

nos exemplos 2, 3 e 4 respectivamente.

Os exemplos 5 e 6 são exemplos de aplicação prática e que serviram de base para estudo da eficiência computacional dos algoritmos.

- Exemplos Ilustrativos

Exemplo 1: A estrutura consiste de uma parede de espessura $2\ell (-\ell < x < \ell)$ e que possui uma fonte interna de calor constante (q_v). A temperatura inicial da parede é zero e as superfícies da parede são mantidas à temperatura inicial. A solução exata para este problema de acordo com [20] é a seguinte:

$$T(t) = \frac{q_v \ell^2}{2K_\ell} \left[1 - \frac{x^2}{\ell^2} - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\cos(2n+1)\pi x}{2\ell} \cdot e^{\frac{-K_\ell (2n+1)^2 \pi^2 t}{\rho c 4\ell^2}} \right]$$

Neste exemplo foi utilizado o Método de Rayleigh e dentre as inúmeras funções de forma $w(x)$ que satisfazem as condições iniciais e de contorno, a função abaixo foi assumida para o problema, por melhor se aproximar da solução analítica:

$$w(x) = \frac{28}{27} \cos \frac{\pi x}{2\ell} - \frac{1}{27} \cos \frac{3\pi x}{2\ell}$$

Esta função satisfaz as condições iniciais $T(x, 0) = 0$ e as condições de contorno $T(\pm \ell, t) = 0$ do problema.

Os seguintes valores foram adotados:

$$\ell = 1 \qquad q_v = 100 \qquad K_\ell = \rho = c = 1.$$

Como a estrutura é simétrica, apenas o trecho para $0 \leq x \leq \ell$ foi resolvido, e as propriedades dos algoritmos foram estudadas no ponto médio da parede ($x = 0$).

As figuras VII-1 à VII-5 nos mostram a distribuição da temperatura ao longo da espessura da placa, para diversos tempos e usando $\Delta t = 0.1$ ($\lambda \cdot \Delta t = 0.25$). Comparando as curvas obtidas para os diversos algoritmos lineares (figs. VII-2 à VII-5) com as curvas obtidas a partir da solução exata (fig. VII-1), podemos verificar que uma boa aproximação da solução exata foi conseguida ao longo de toda a espessura da placa. Como o intervalo de tempo usado nos leva a um valor de $\lambda \cdot \Delta t < 1$ o método Forward linear ($\zeta = 0$) não apresentou oscilação, apesar de não ter sido alcançada uma boa precisão.

Fixando agora, o ponto $x = 0$, e usando ainda $\Delta t = 0.1$ ($\lambda \cdot \Delta t = 0.25$), podemos observar na figura VII-6 o comportamento dos diversos algoritmos lineares em relação à solução exata (curva contínua). Os métodos de Galerkin ($\zeta = 2/3$) e trapezoidal ($\zeta = 1/2$) apresentam a melhor aproximação ao longo do tempo, enquanto o método Forward apresenta a pior precisão dentre os algoritmos lineares. Comparando agora a figura VII-7 à figura VII-6 verificamos a excelente precisão obtida para a expansão cúbica dos algoritmos em relação à expansão linear.

Aumentando-se o valor do intervalo de tempo (Δt) para 0.5 obtemos um valor de $\lambda \cdot \Delta t = 1.25$. Como neste caso, $\lambda \cdot \Delta t > 1$ verificamos um comportamento oscilatório para o algoritmo Forward (fig. VII-8), enquanto que os demais algoritmos (fig. VII-9) não apresentam oscilações. Aumentando-se ainda mais o intervalo de tempo ($\Delta t = 0.9$), chegamos a um valor para $\lambda \cdot \Delta t$ igual a 2.24 (fig. VII-10). Neste ponto o Método Forward já apresenta instabilidade, isto é, diverge da solução exata ao longo do tempo. Como $\lambda \cdot \Delta t > 2$, o método trapezoidal apresenta ligeira oscilação, mas converge rapidamente para a solução exata.

Visivelmente, o método Backward mostrou a pior precisão dentre os algoritmos lineares incondicionalmente estáveis, apesar de não apresentar comportamento oscilatório.

CURVAS POSIÇÃO X TEMPERATURA - SOLUÇÃO EXATA

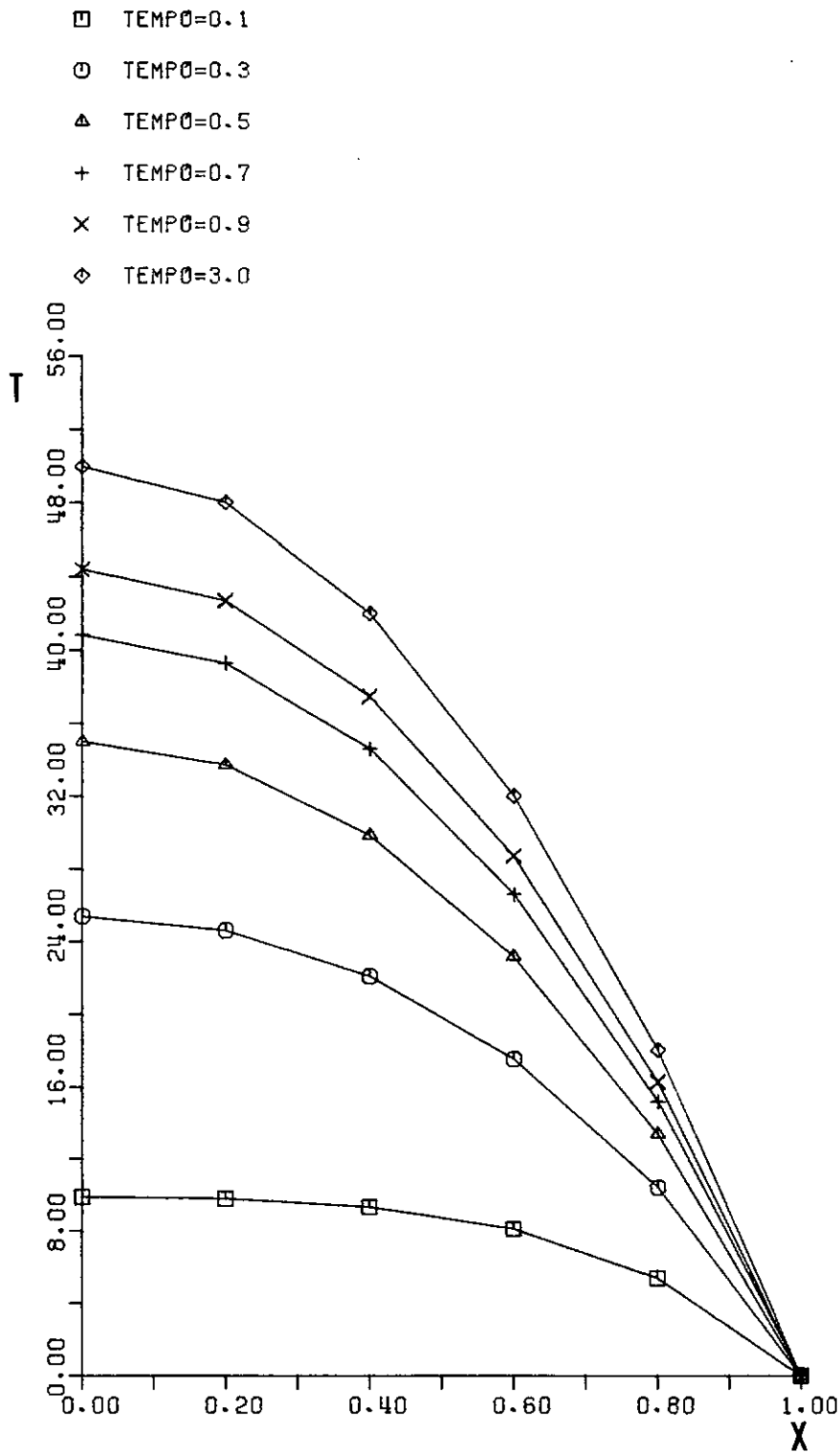


FIG. VII-1

CURVAS POSIÇÃO X TEMPERATURA - ZETA=0

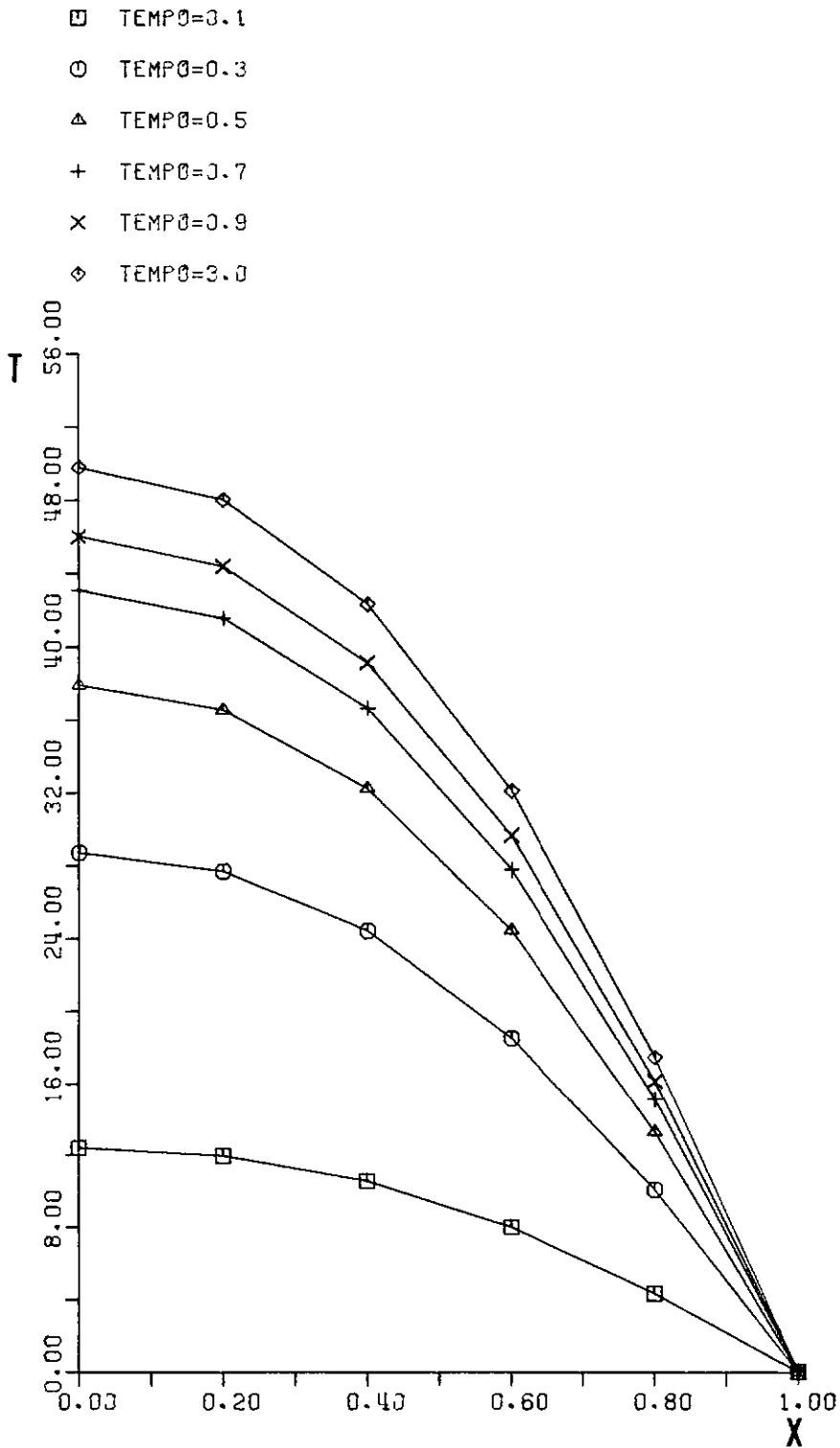


FIG. VII-2

CURVAS POSIÇÃO X TEMPERATURA - ZETA=1/2

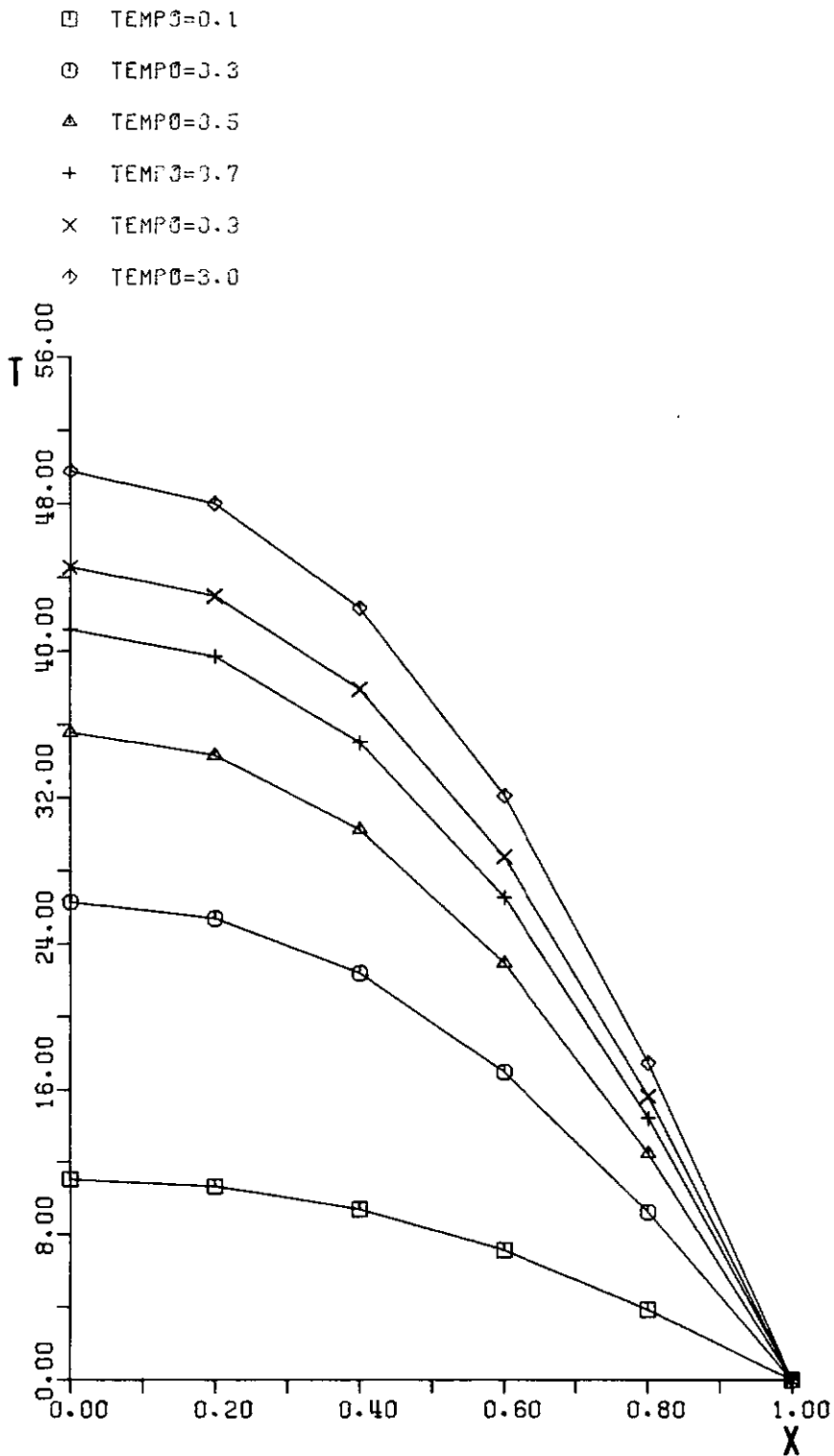


FIG. VII-3

CURVAS POSIÇÃO X TEMPERATURA - ZETA=2/3

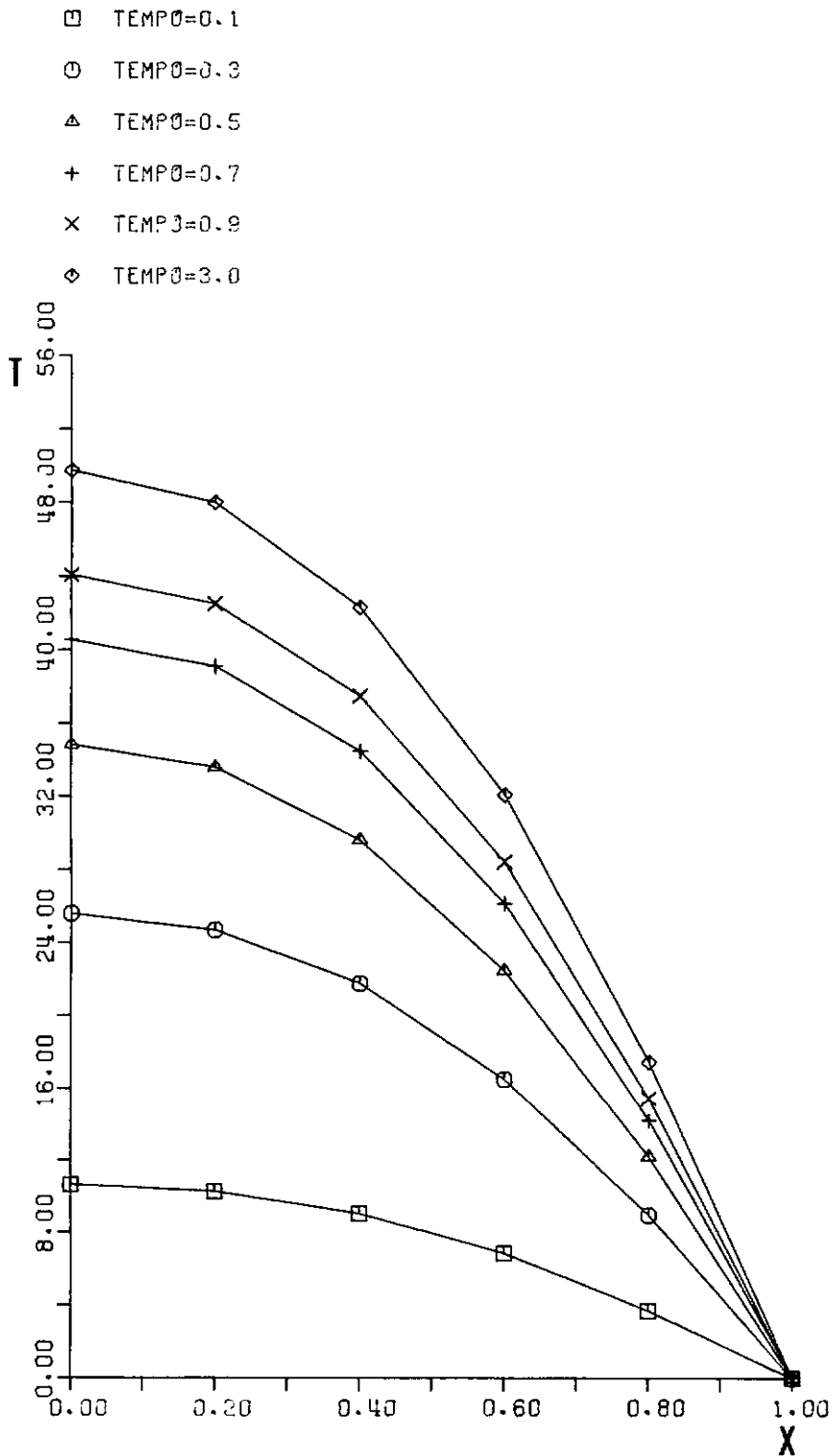


FIG. VII-4

CURVAS POSIÇÃO X TEMPERATURA - ZETA=1

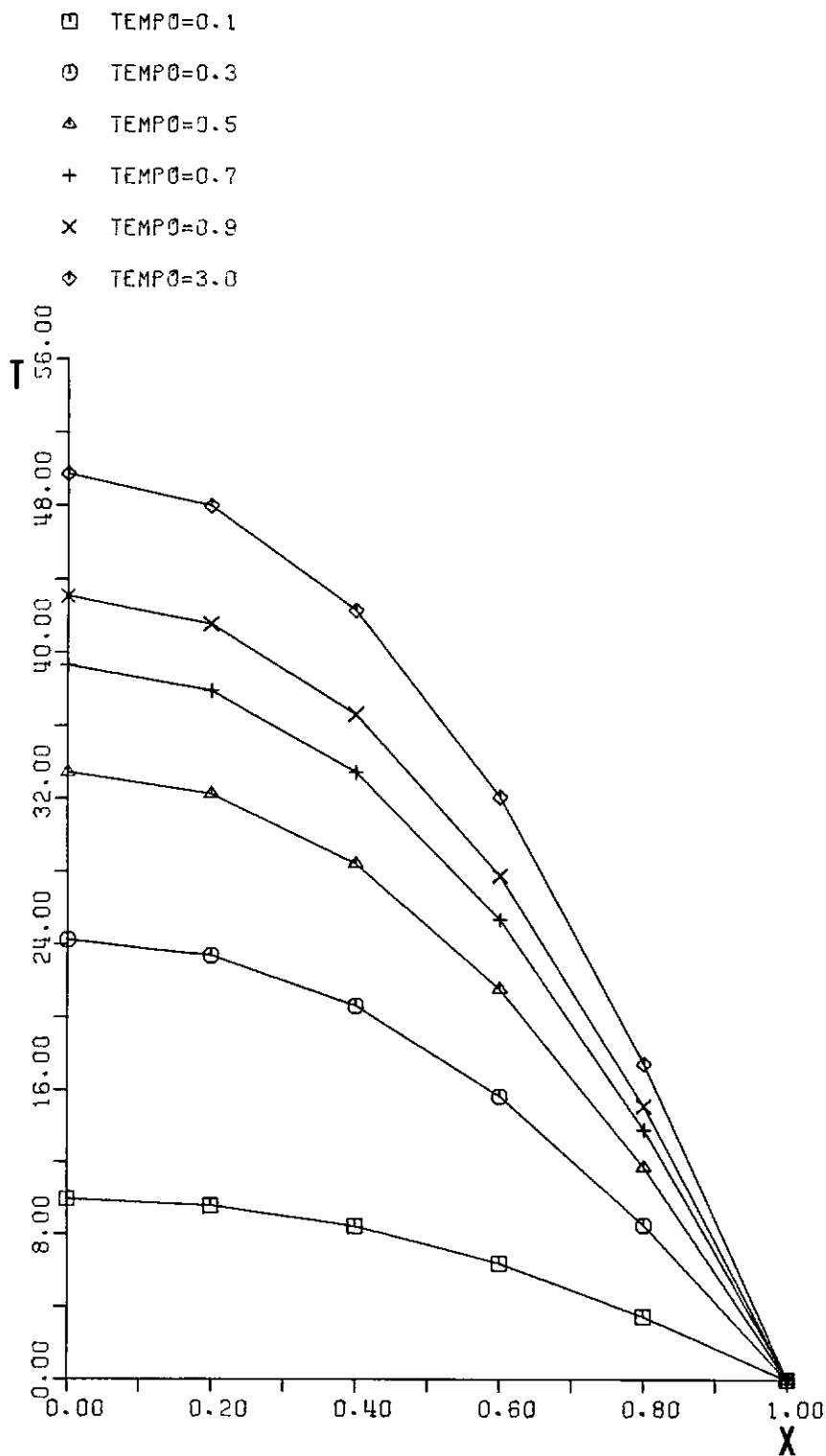


FIG.VII-5

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.1

- △ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=0
- + EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2
- × EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=2/3
- ◇ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1

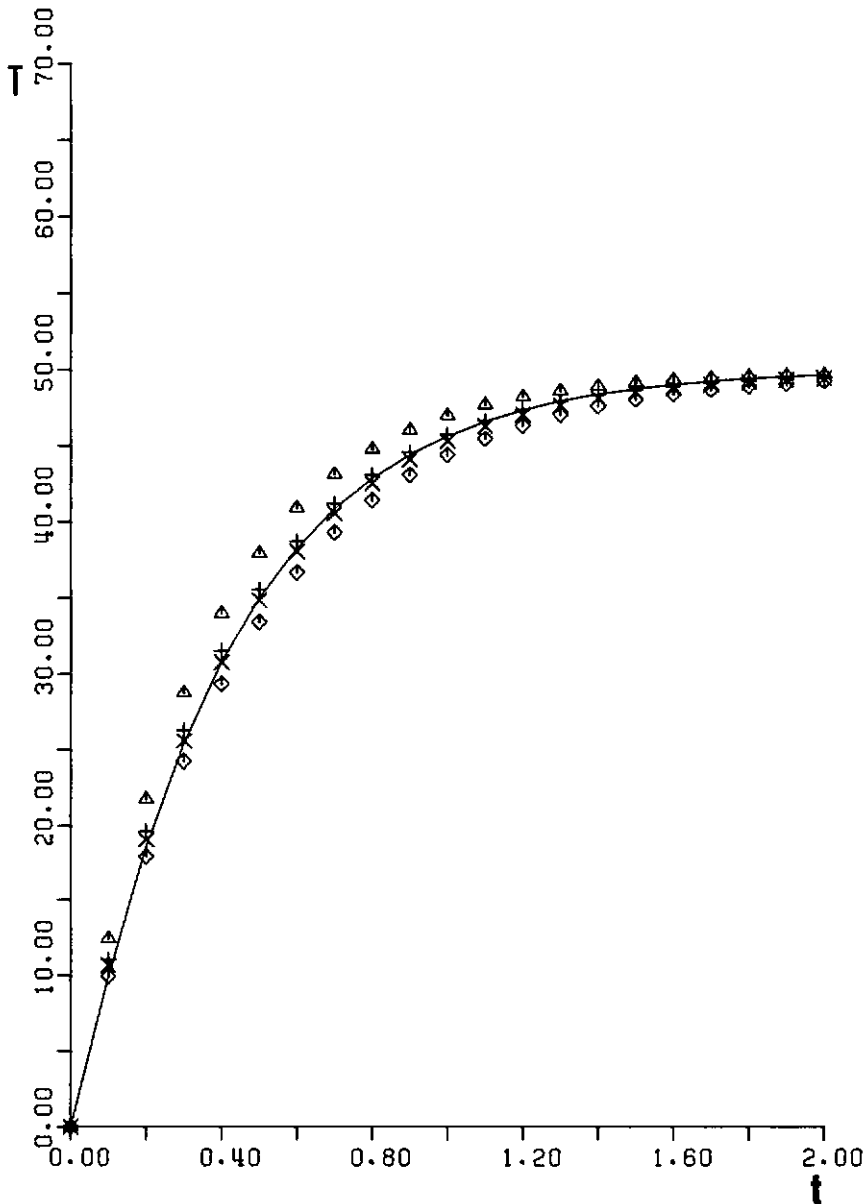


FIG. VII-6

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.1

- EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0
- △ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2
- + EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0.629
- × EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1

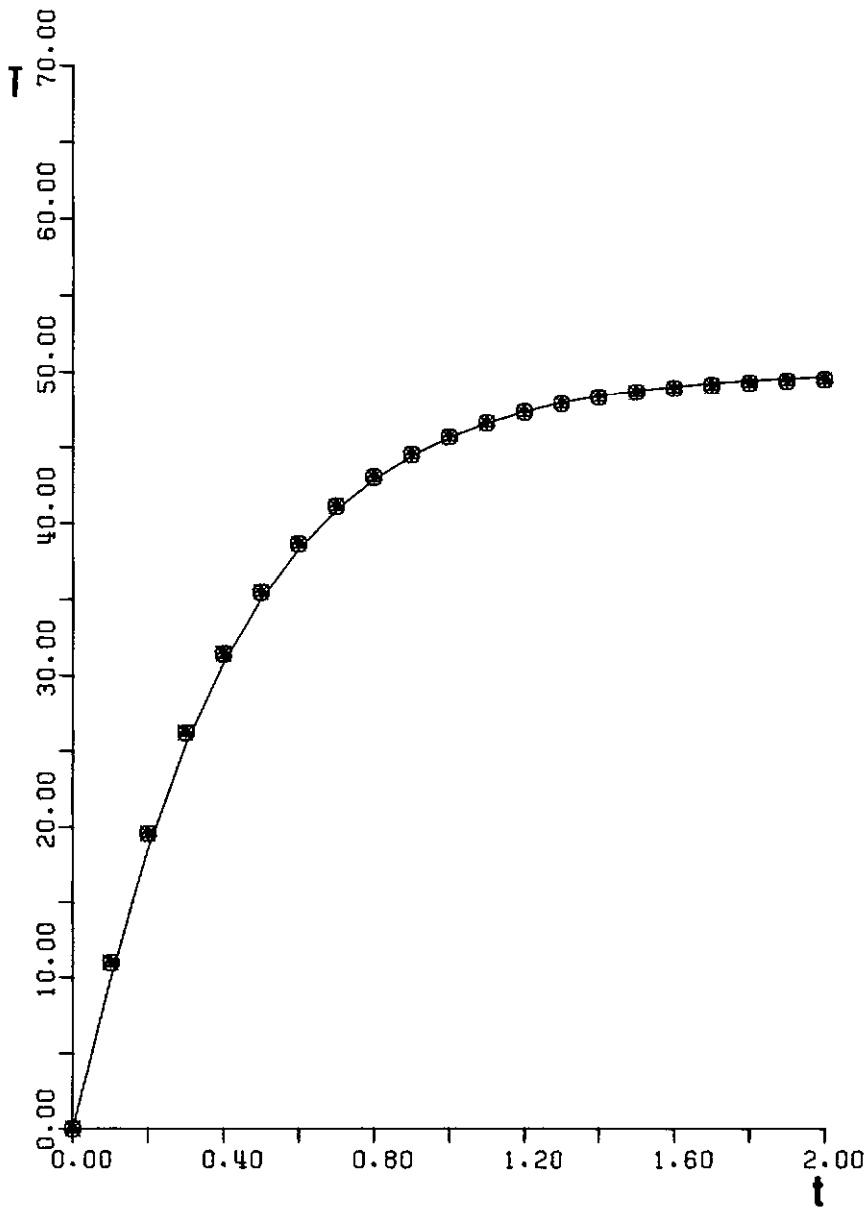


FIG. VII-7

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.5

⊙ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=0

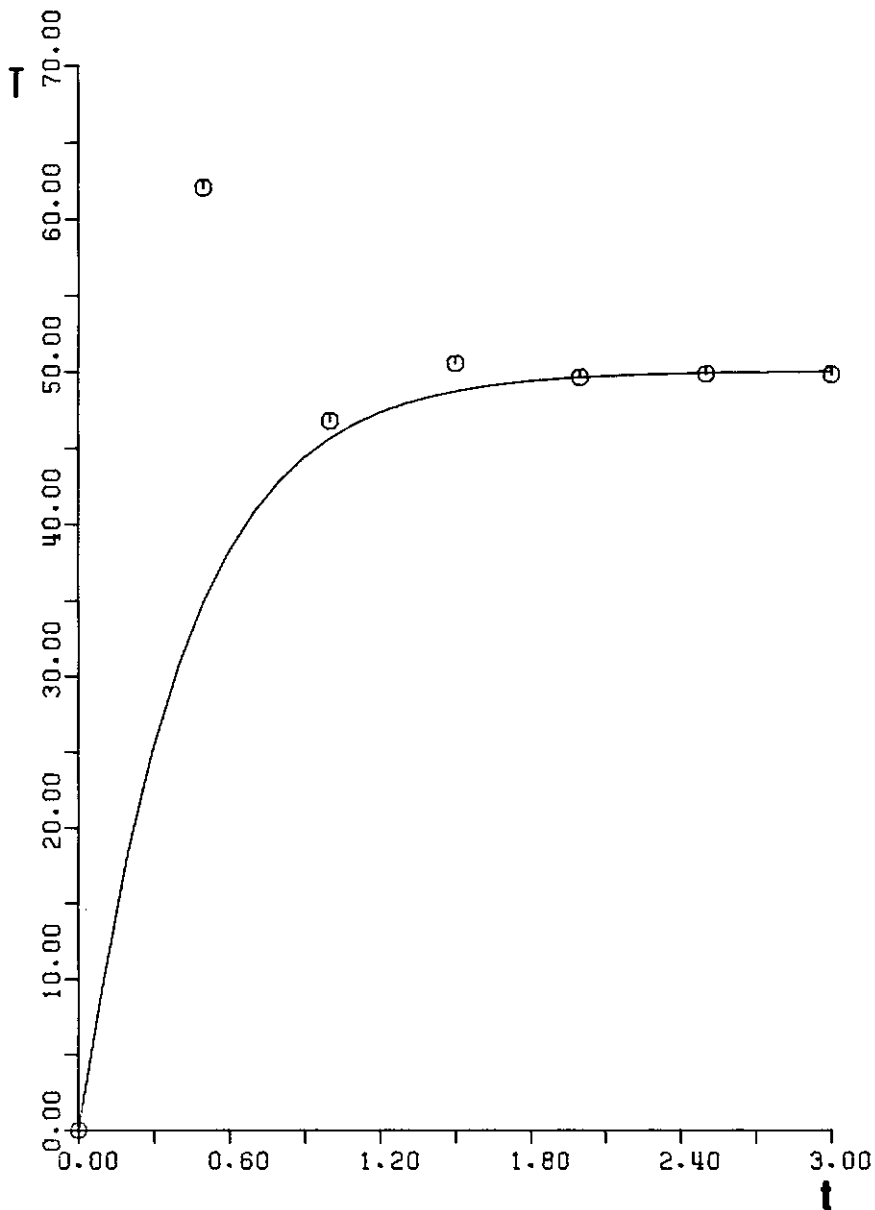


FIG. VII-8

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.5

△ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

+ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=2/3

x EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1

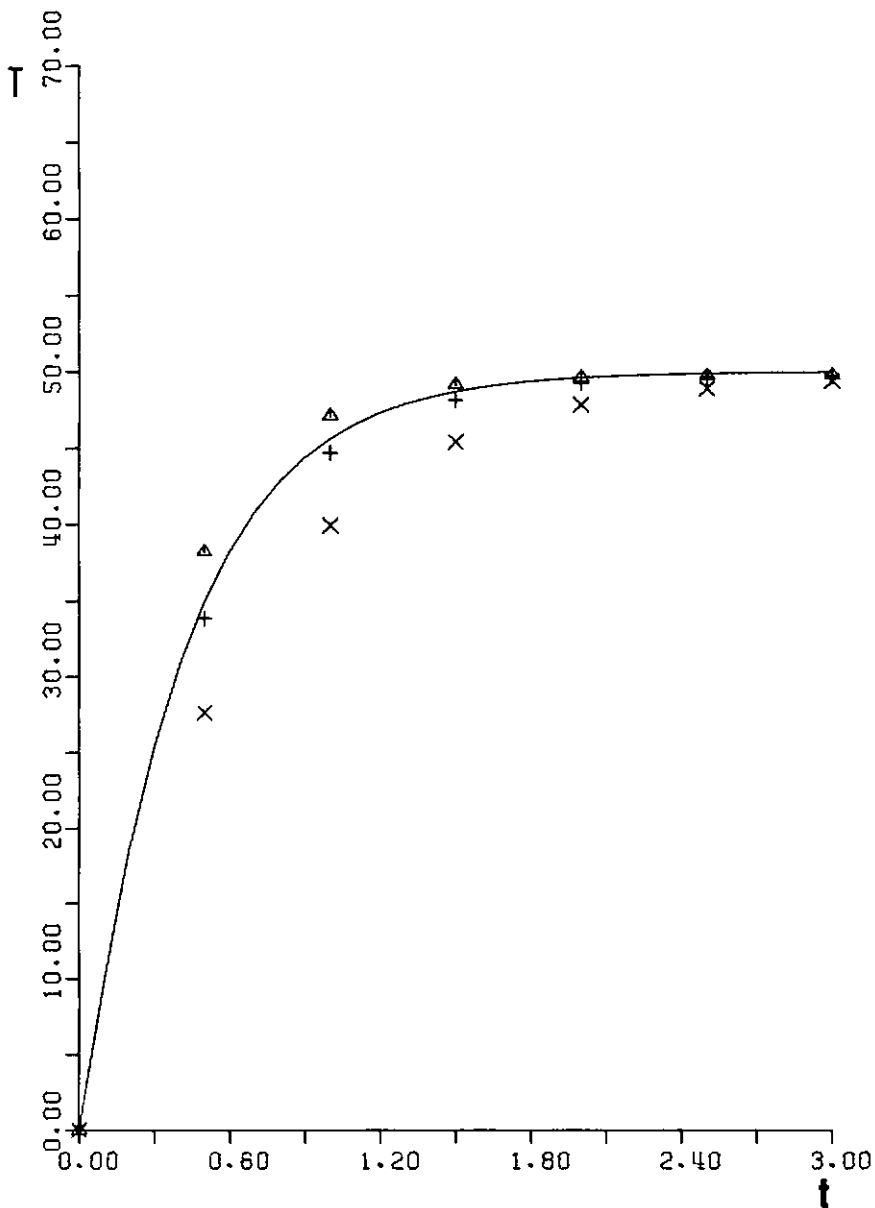


FIG.VII-9

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.9

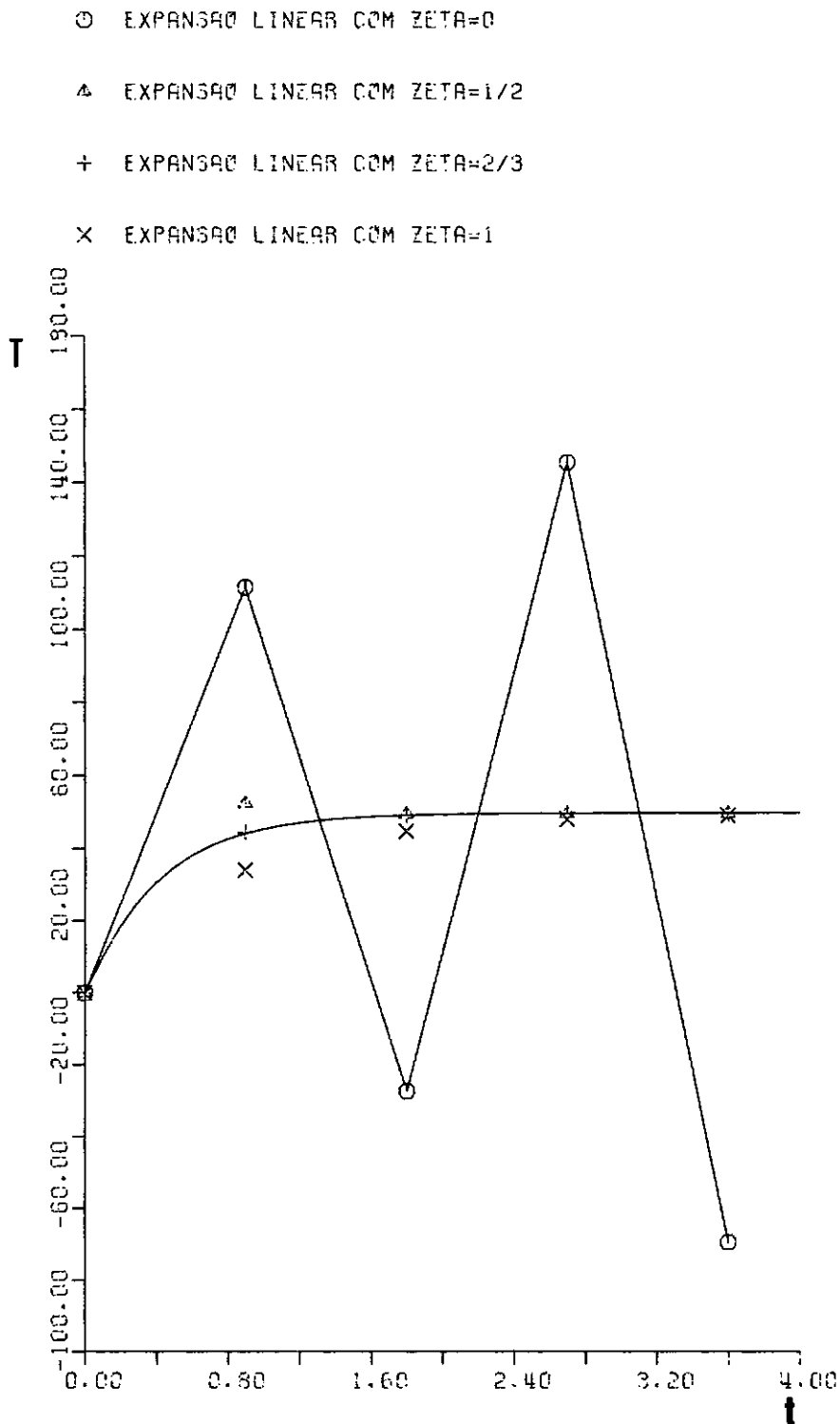


FIG. VII-10

Exemplo 2: O mesmo problema do exemplo 1 foi resolvido agora, usando o método dos elementos finitos para discretização no espaço. Foi utilizada uma malha com 10 elementos isoparamétricos, parabólicos porém, como a estrutura é simétrica, apenas metade da estrutura foi representada.

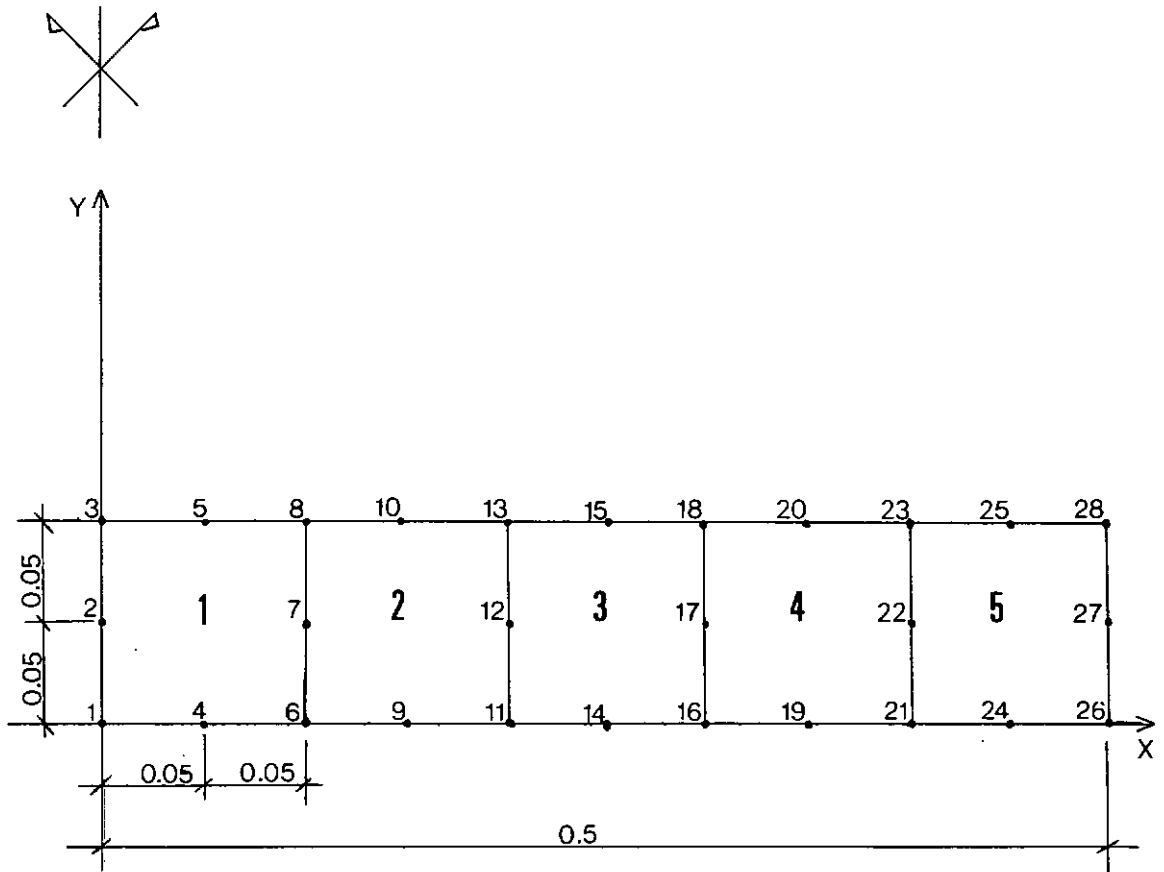


FIG. VII-11 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO 2.

As figuras VII-12, VII-13 e VII-14 ilustram o comportamento dos diversos algoritmos (expansão linear) em relação à solução exata para diferentes valores de Δt e no ponto $x=0$. Para esses mesmos valores de Δt , a expansão cúbica dos diversos algoritmos é mostrada nas figuras VII-15 à VII-17.

A mesma análise para os diversos operadores lineares mostrada no exemplo 1, pode ser verificada neste exemplo.

Cabe ressaltar aqui, além da grande precisão alcançada na expansão cúbica em relação à linear, a ausência de oscilação para o método trapezoidal e de Galerkin, expansão cúbica (figuras VII-15 e VII-16).

Alguns aspectos computacionais foram estudados para este exemplo usando o método trapezoidal ($\zeta=1/2$) e no ponto médio da placa ($x=0.0$). As curvas $\Delta t \times$ Erro (fig. VII-18), $\Delta t \times$ tempo de processamento (fig. VII-19) e Erro \times tempo de processamento (fig. VII-20) foram plotadas. O erro para um determinado intervalo de tempo foi calculado, em cada tempo, pela fórmula:

$$\epsilon = \frac{|T - T_{EF}|}{T} \cdot 100 \quad \text{onde,}$$

T = temperatura exata

T_{EF} = temperatura obtida usando o Método dos Elementos Finitos e os algoritmos de integração.

O erro médio ao longo do tempo foi calculado fazendo-se a integral de Simpson dos erros encontrados para cada tempo. O tempo de processamento está expresso em segundos e foi obtido através do comando TIME do B6700.

Podemos observar a grande diferença de precisão da

expansão cúbica em relação à linear a medida em que o valor do intervalo de tempo aumenta (fig. VII-18).

O tempo de processamento gasto na expansão cúbica para este exemplo é, em média, quatro vezes maior que o tempo gasto na expansão linear. Apesar disto, como o exemplo tem apenas 25 graus de liberdade e o tempo de processamento máximo observado tenha sido de 11.2 segundos, este fator não é decisivo para a escolha da expansão a utilizar.

A figura VII-20 nos mostra que os erros médios encontrados para a expansão cúbica do algoritmo com $Zeta = 1/2$ para o maior intervalo de tempo utilizado ($\Delta t = 0.25$) não alcançaram o menor erro médio obtido na solução linear ($\Delta t = 0.05$), dificultando com isso uma comparação em termos de tempo de processamento gasto, para um determinado erro médio percentual.

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.20

○ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=2/3

+ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1.0

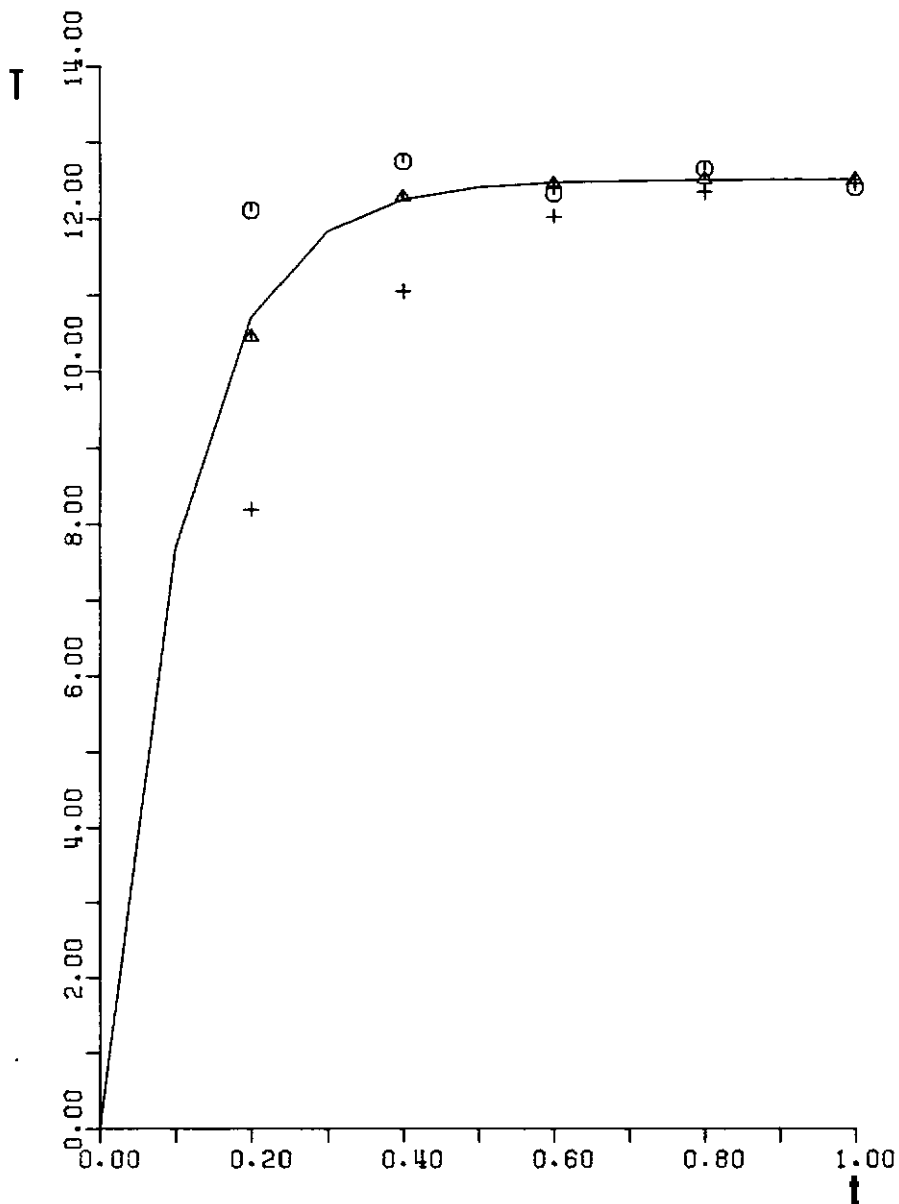


FIG. VII-12

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.10

○ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=2/3

+ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1.0

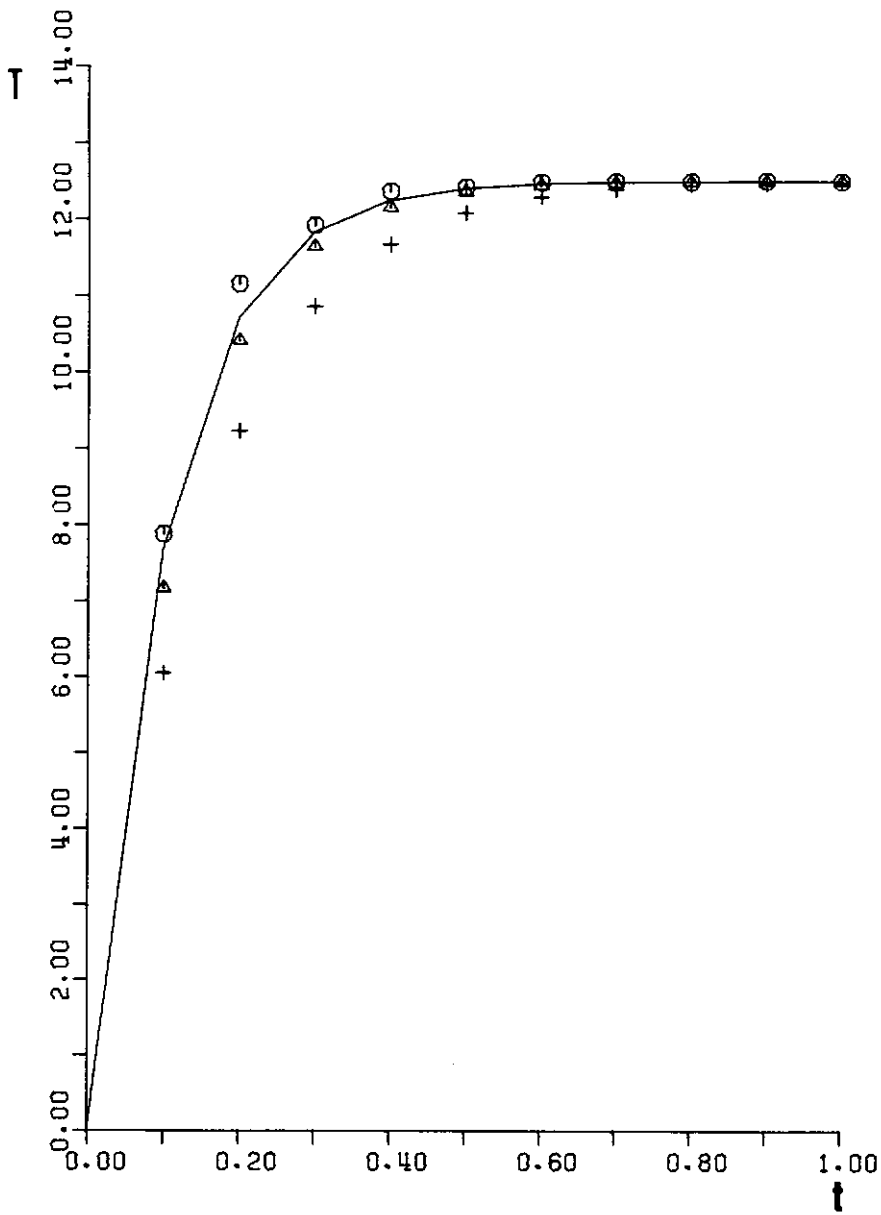


FIG.VII-13

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.05

○ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=2/3

+ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1.0

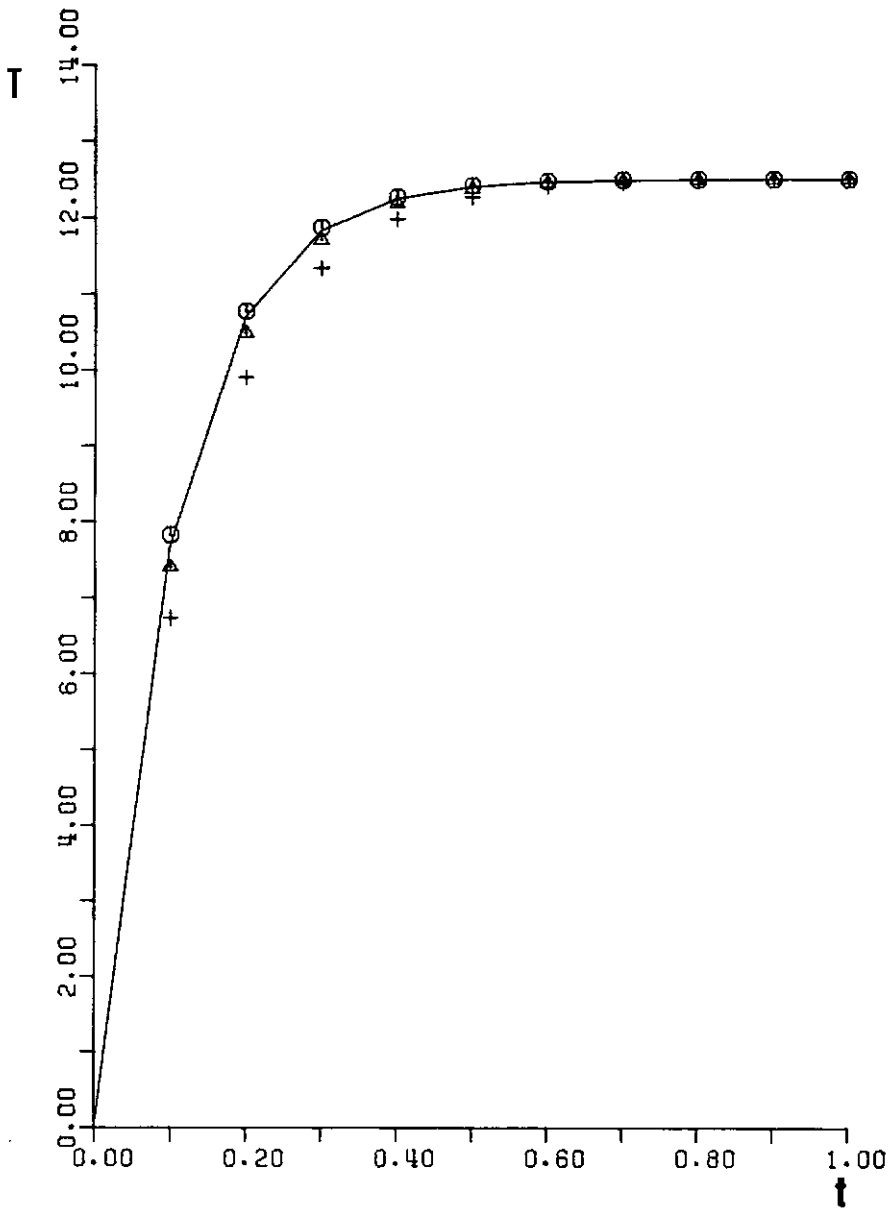


FIG. VII-14

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.20

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0.629

+ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1.0

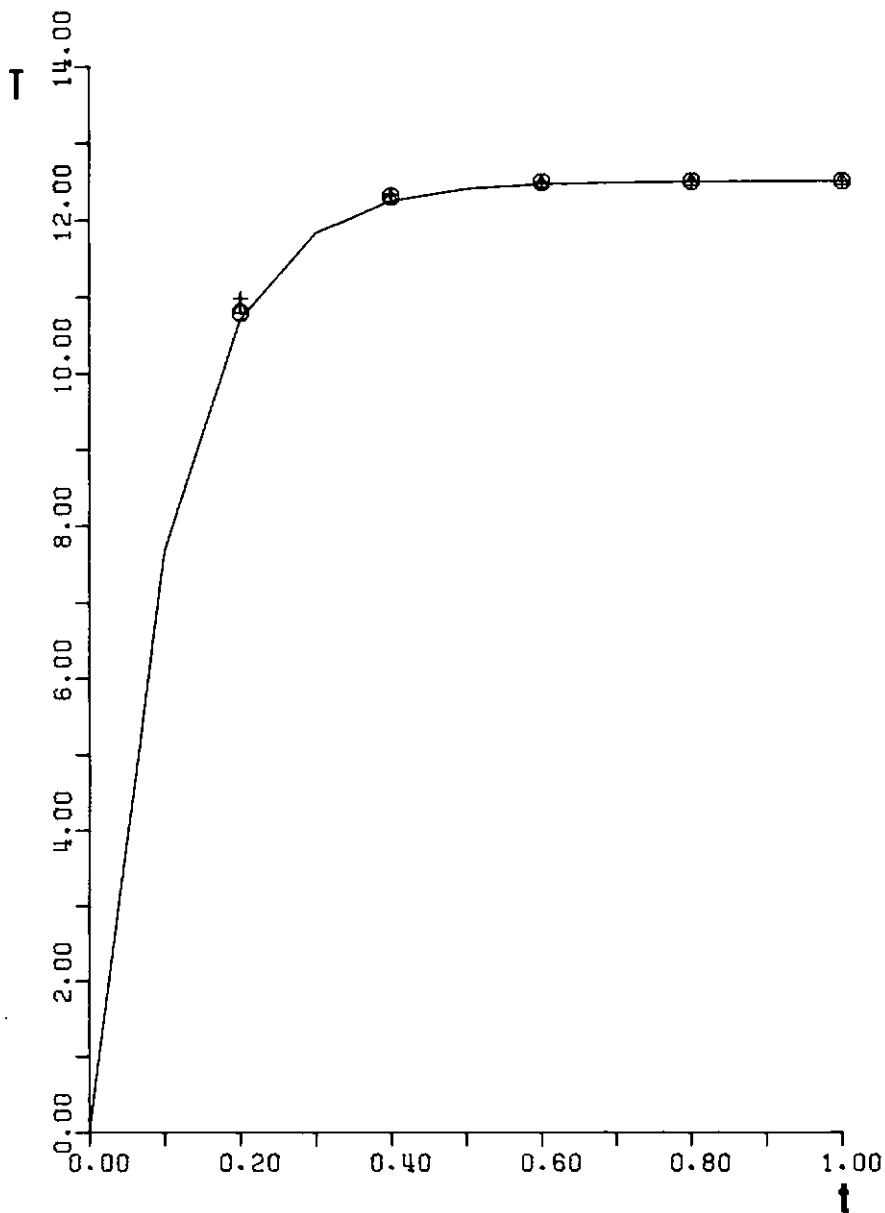


FIG.VII-15

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.10

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0.629

+ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1.0

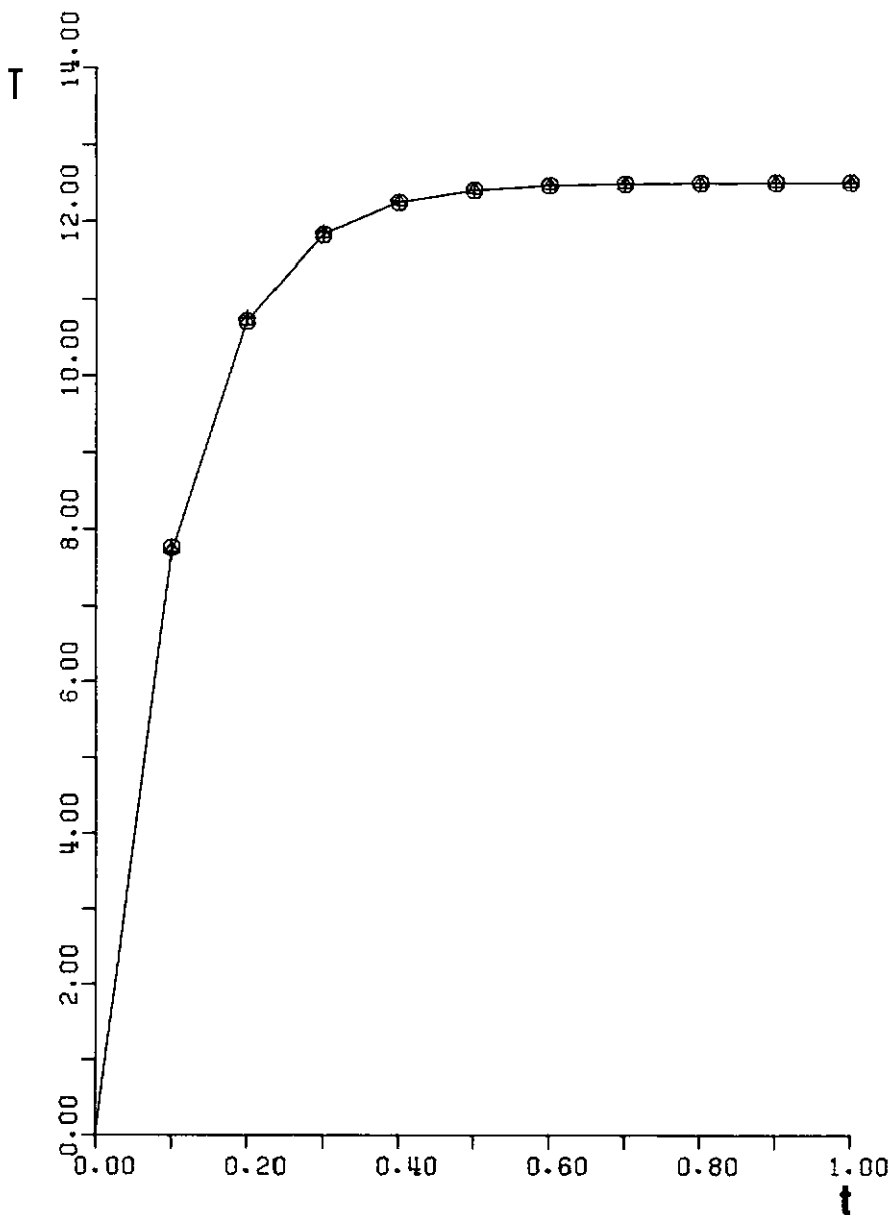


FIG. VII-16

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.05

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0.629

+ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1.0

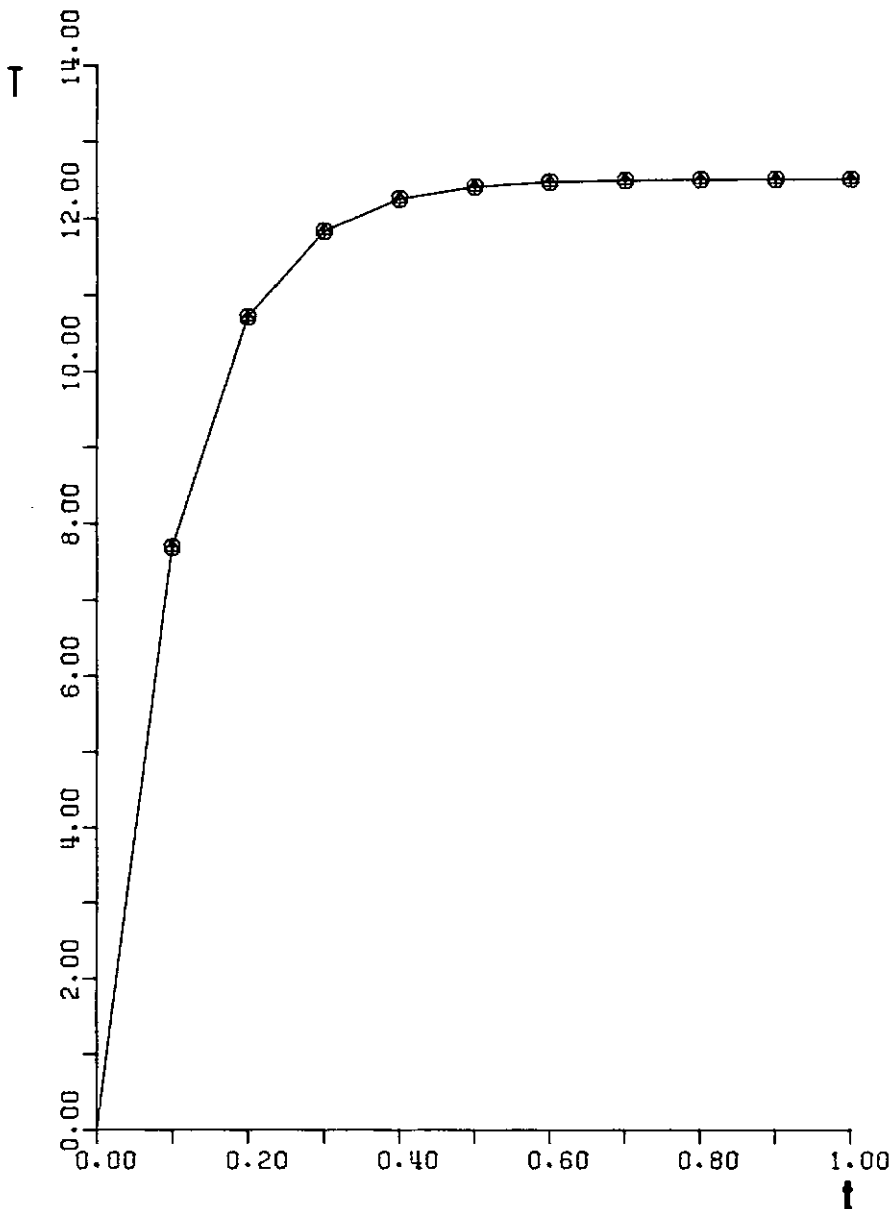


FIG.VII-17

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X ERRO MEDIO

□ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

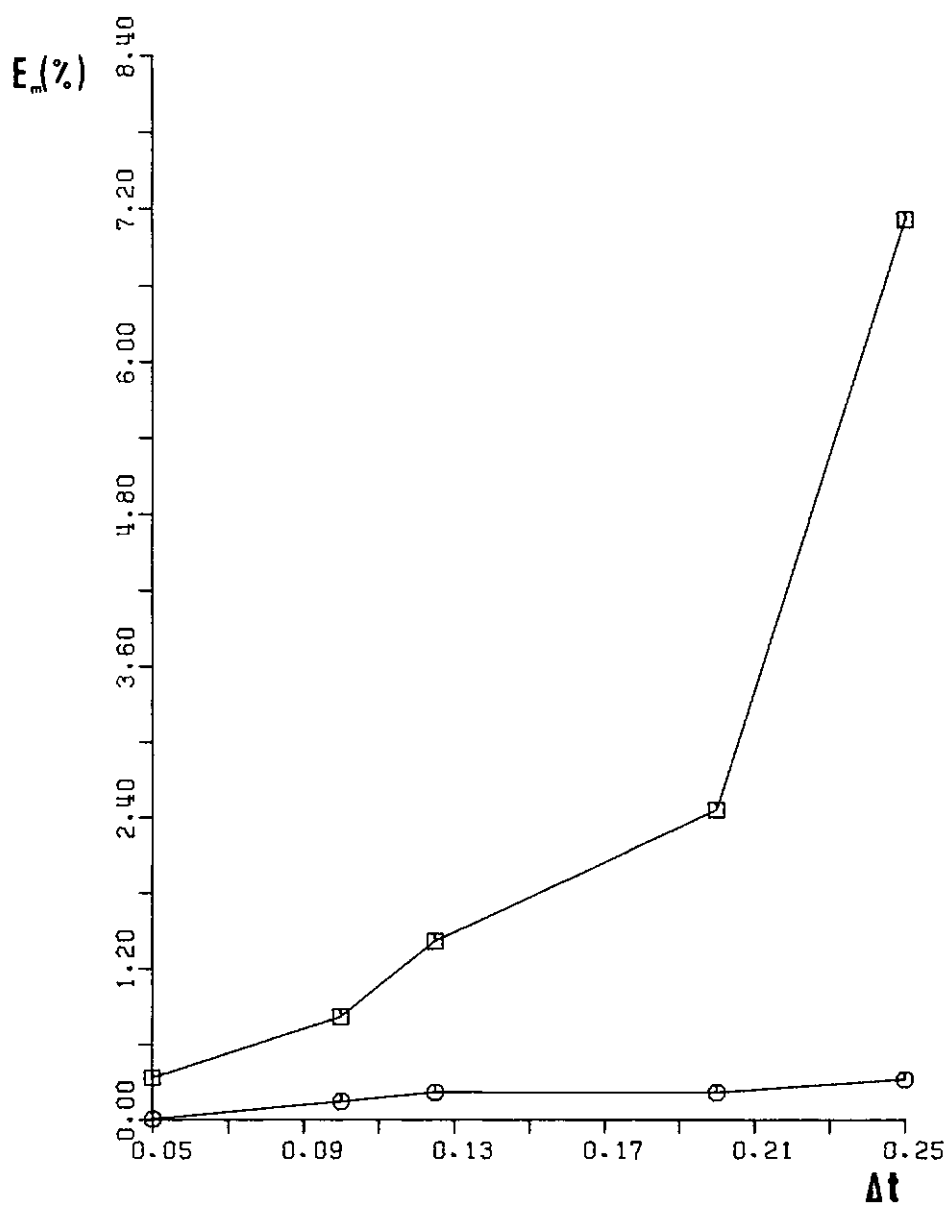


FIG.VII-18

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X TEMPO DE PROCESSAMENTO

□ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

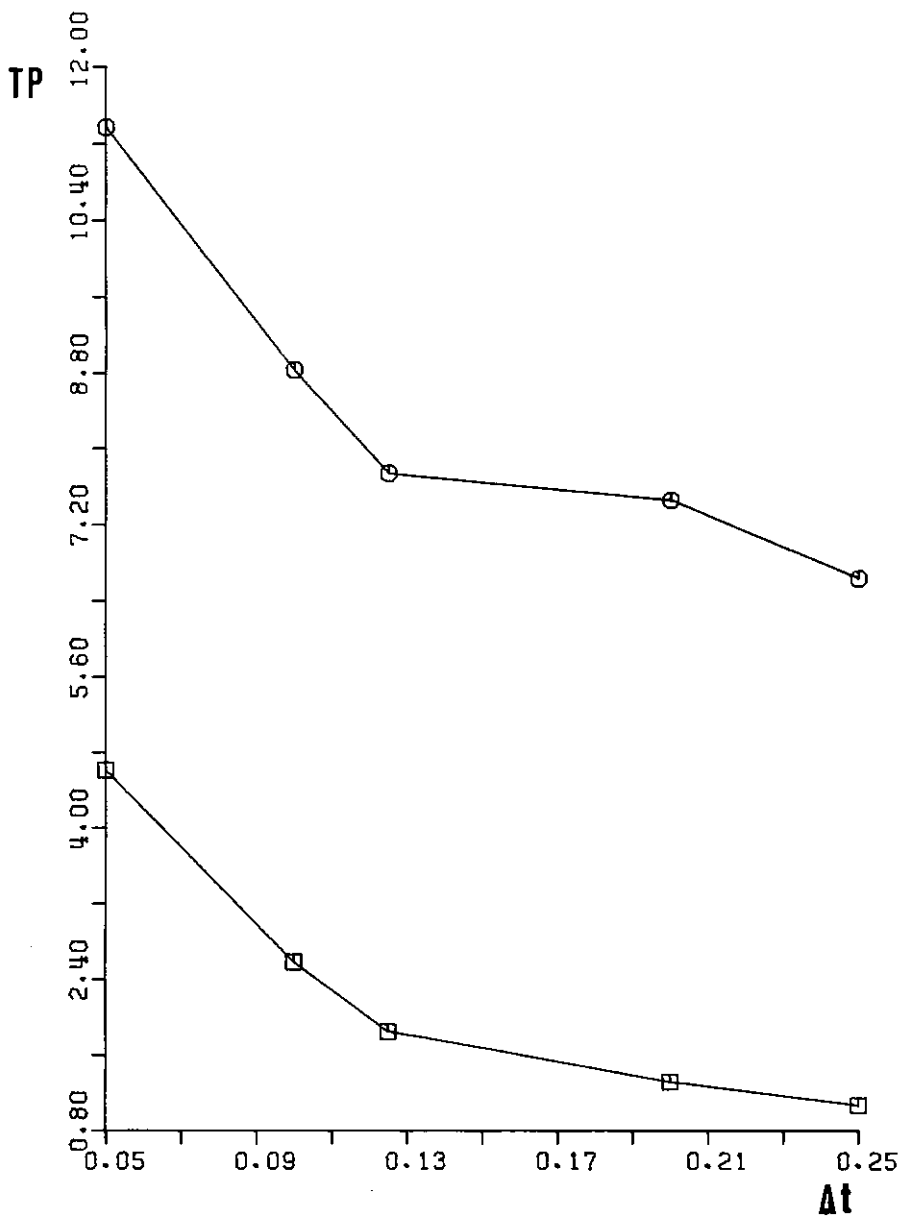


FIG.VII-19

CURVAS ERRO MEDIO X TEMPO DE PROCESSAMENTO

□ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

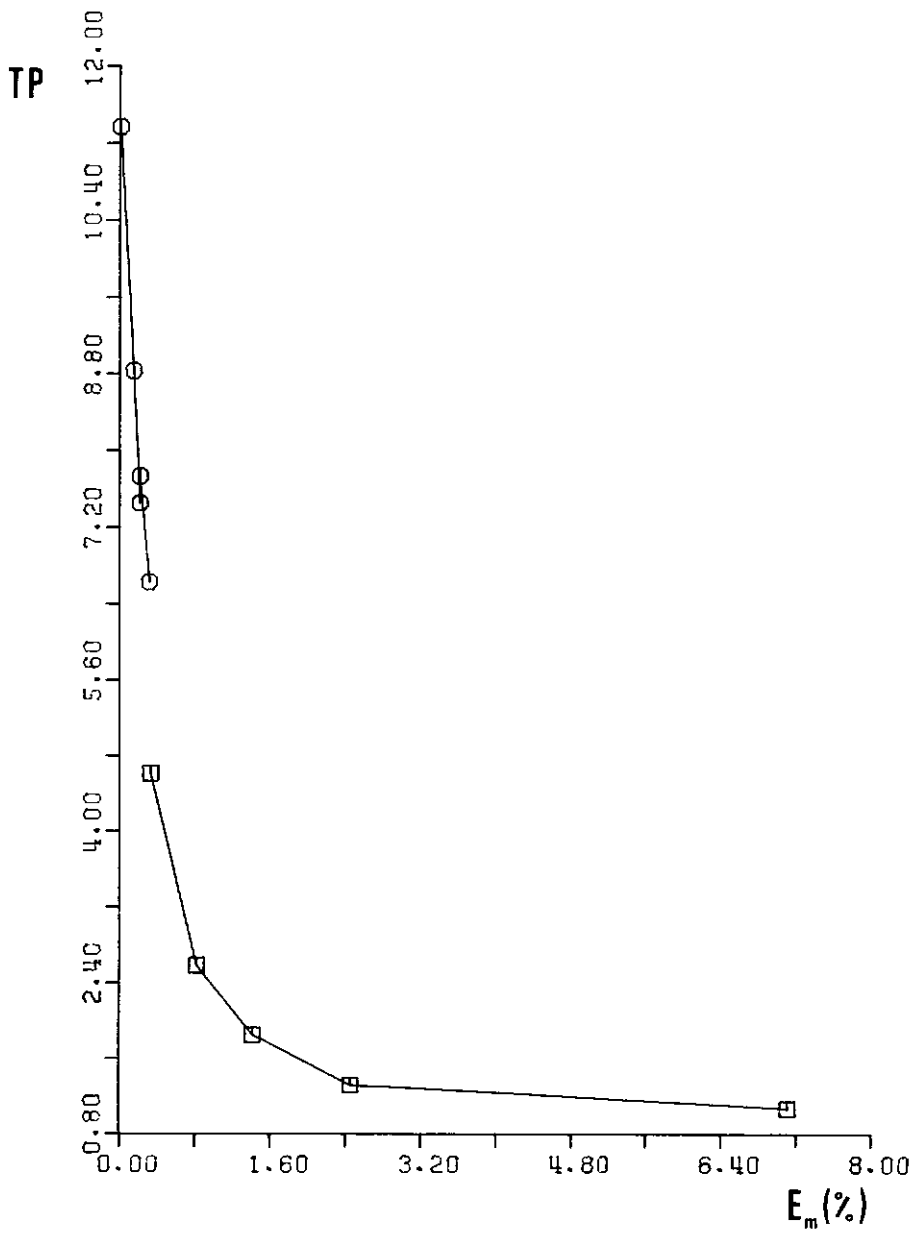


FIG.VII-20

Exemplo 3: Este exemplo consiste de uma placa de espessura igual a ℓ ($\ell=1$), a qual possui temperatura inicial igual a zero ($T_0 = 0^\circ\text{C}$) e está submetida a um fluxo de calor constante ($q_F = 100$) no lado $x = \ell$. O outro lado da placa é mantido à temperatura inicial ($T(x=0) = 0^\circ\text{C}$ para $t>0$). Ver figura VII-21.

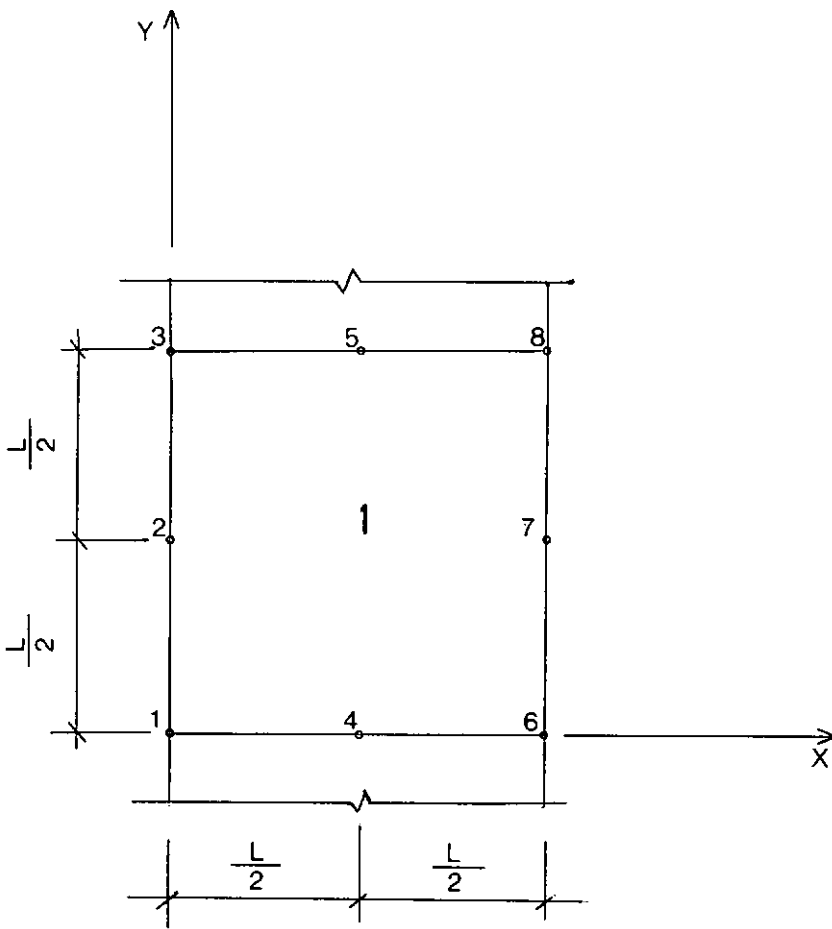


FIG. VII-21 - ESTRUTURA E MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO 3.

Características do material: $K_\ell = 1$

$$\rho c = 1$$

A solução analítica para este problema uni-dimensional, de acordo com [20, p. 113], vale:

$$T(x, t) = \frac{q_F x}{K_\ell} - \frac{8 q_F \ell}{K_\ell \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{\frac{-K_\ell (2n+1)^2 \pi^2 t}{4 \rho c \ell^2}} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right)$$

A solução numérica foi idealizada com um único elemento isoparamétrico parabólico (fig. VII-21). Esta idealização com 5 graus de liberdade representa um problema de raio espectral muito pequeno e corresponde ao estudo de sistemas de 1 grau de liberdade. O cálculo dos autovalores de \underline{K} e \underline{C} nos mostra a seguinte relação aproximada para $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$:

$$\frac{\lambda_{\max}^A}{\lambda_{\min}^A} \approx \frac{\lambda_{\max}^K}{\lambda_{\min}^C} = \frac{6.8929}{0.1225} = 56.26$$

$$\frac{\lambda_{\min}^A}{\lambda_{\max}^A} \approx \frac{\lambda_{\min}^K}{\lambda_{\max}^C} = \frac{0.7737}{0.5442} = 1.42$$

Assim:

$$\frac{\lambda_{\max}^A}{\lambda_{\min}^A} \approx 40$$

A distribuição da temperatura no ponto $x=1$ foi analisada até um tempo $t=1$ com 10 intervalos de tempo iguais a 0.1 ($\Delta t = 0.1$).

A figura VII-22 mostra o comportamento dos algoritmos lineares Galerkin, Backward e o método trapezoidal em relação à solução analítica, que foi desenvolvida com 1000 termos para obtermos um alto grau de precisão.

Neste exemplo o método de Galerkin ($\zeta=2/3$) apresentou uma precisão geral um pouco superior que a regra trapezoidal ($\zeta=1/2$). Esta última apresentou uma ligeira oscilação no início do intervalo de integração no tempo, já que o valor de Δt usado acarreta um valor de $\lambda.\Delta t$ maior que 2. Porém essa oscilação rapidamente decresceu com o tempo.

A curva para o método Forward não foi plotada, pois este algoritmo diverge rapidamente com oscilações cada vez maiores, já que $\lambda.\Delta t > 2$.

O algoritmo Backward apresentou o maior erro dentro os métodos lineares.

A figura VII-23 ilustra o comportamento dos operadores de alta ordem (expansão cúbica). Comparando a figura VII-22 à figura VII-23 podemos notar claramente a grande precisão apresentada pela expansão cúbica em relação à expansão linear. Esta precisão pode ser avaliada também, observando-se as curvas tempo X erro da expansão linear (fig. VII-24) e da expansão cúbica (fig. VII-25).

Uma análise dos erros para diferentes valores de Δt

foi feita, como pode ser visto na figura VII-26, com $\zeta = 1/2$.

A figura VII-27 mostra as curvas $\Delta t \times$ tempo de processamento (segundos) das expansões linear e cúbica do algoritmo trapezoidal. Podemos notar que o aumento do tempo de processamento da expansão cúbica em relação à linear foi relativamente pequeno para este exemplo.

Finalmente, a figura VII-28 mostra as curvas erro \times tempo de processamento para o algoritmo trapezoidal.

Neste figura, podemos observar que se desejarmos obter um erro médio de até 3%, o tempo de processamento da expansão cúbica é inferior ao tempo gasto na expansão linear para o mesmo erro. E, a medida que este erro diminui, esta diferença é ainda maior.

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.1

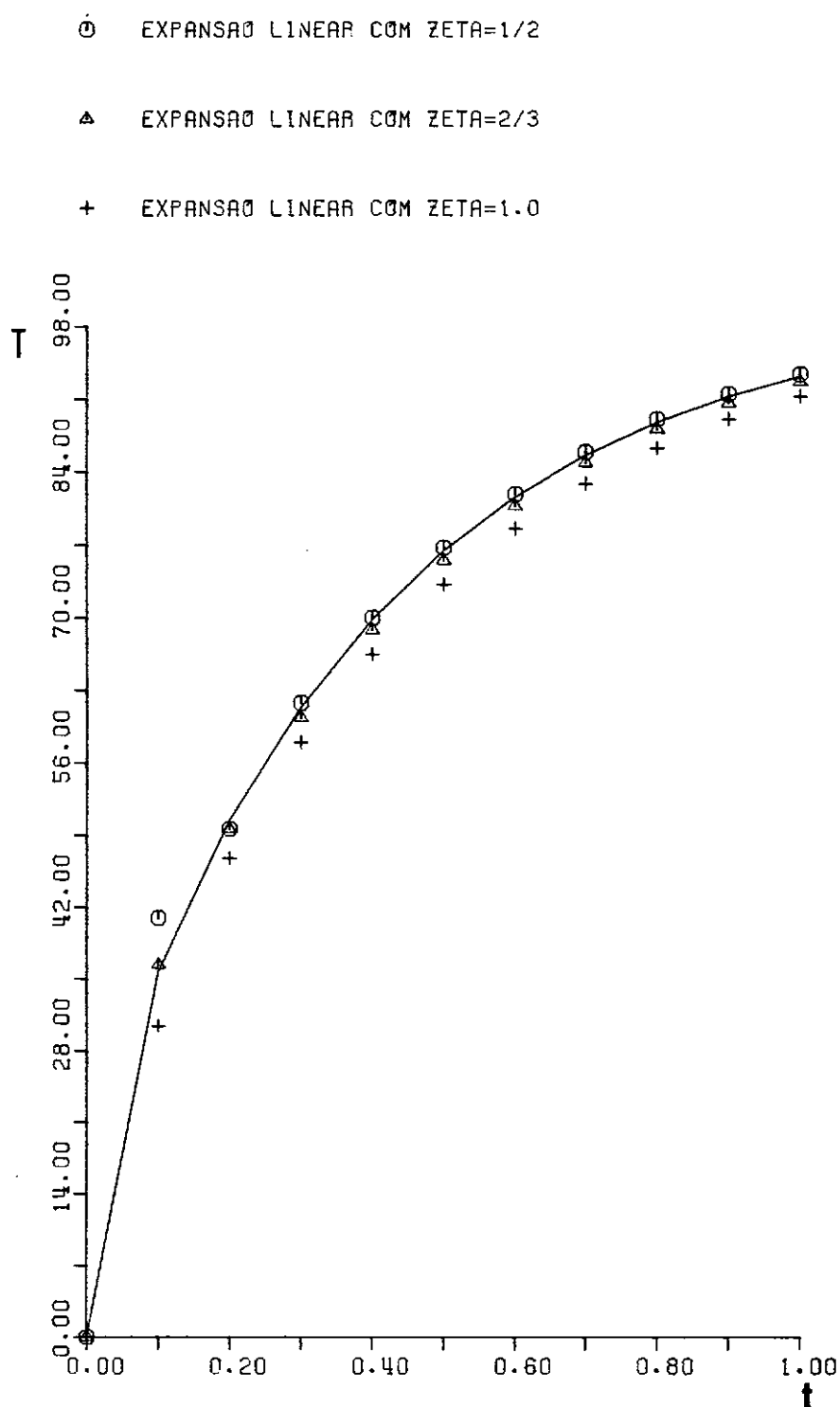


FIG.VII-22

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.1

- EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2
△ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0.629
+ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1.0

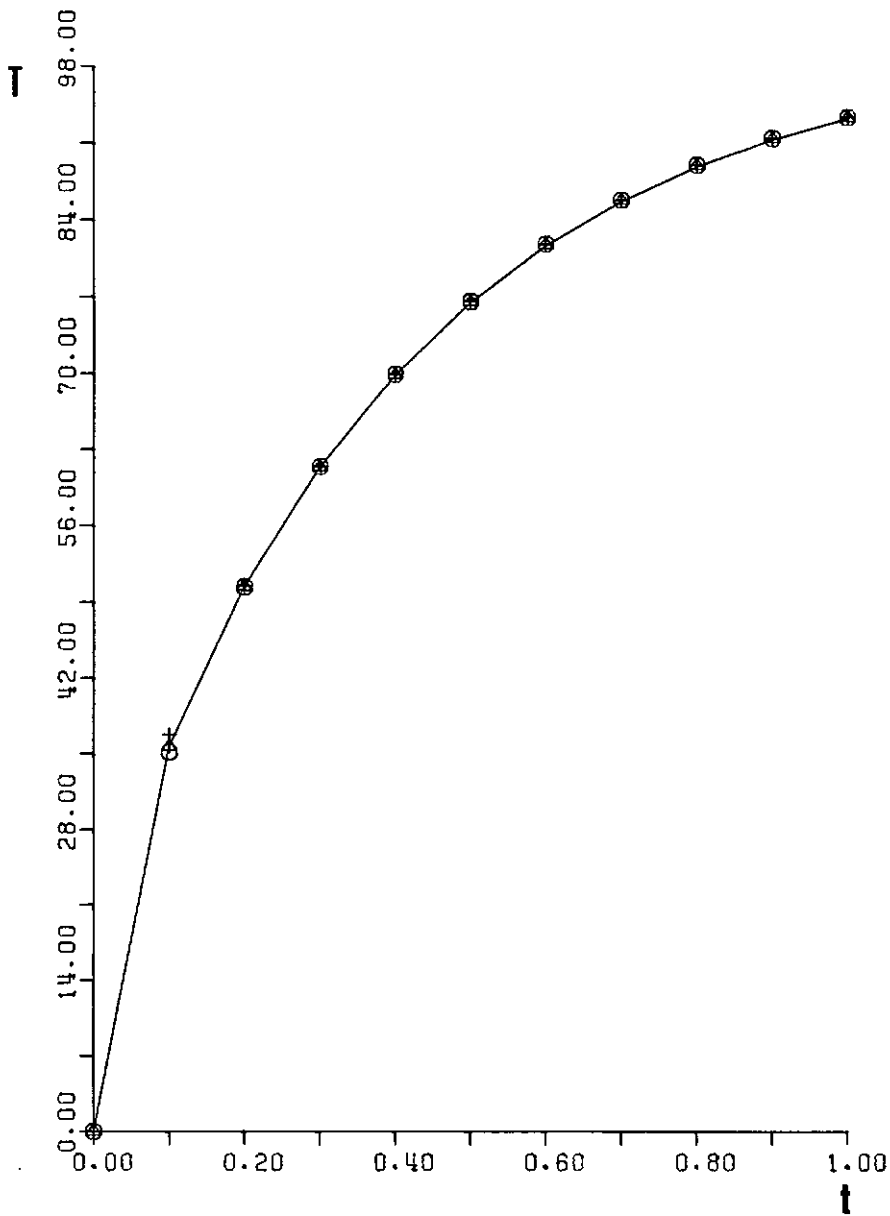


FIG.VII-23

CURVAS TEMPO X ERRO - EXPANSÃO LINEAR

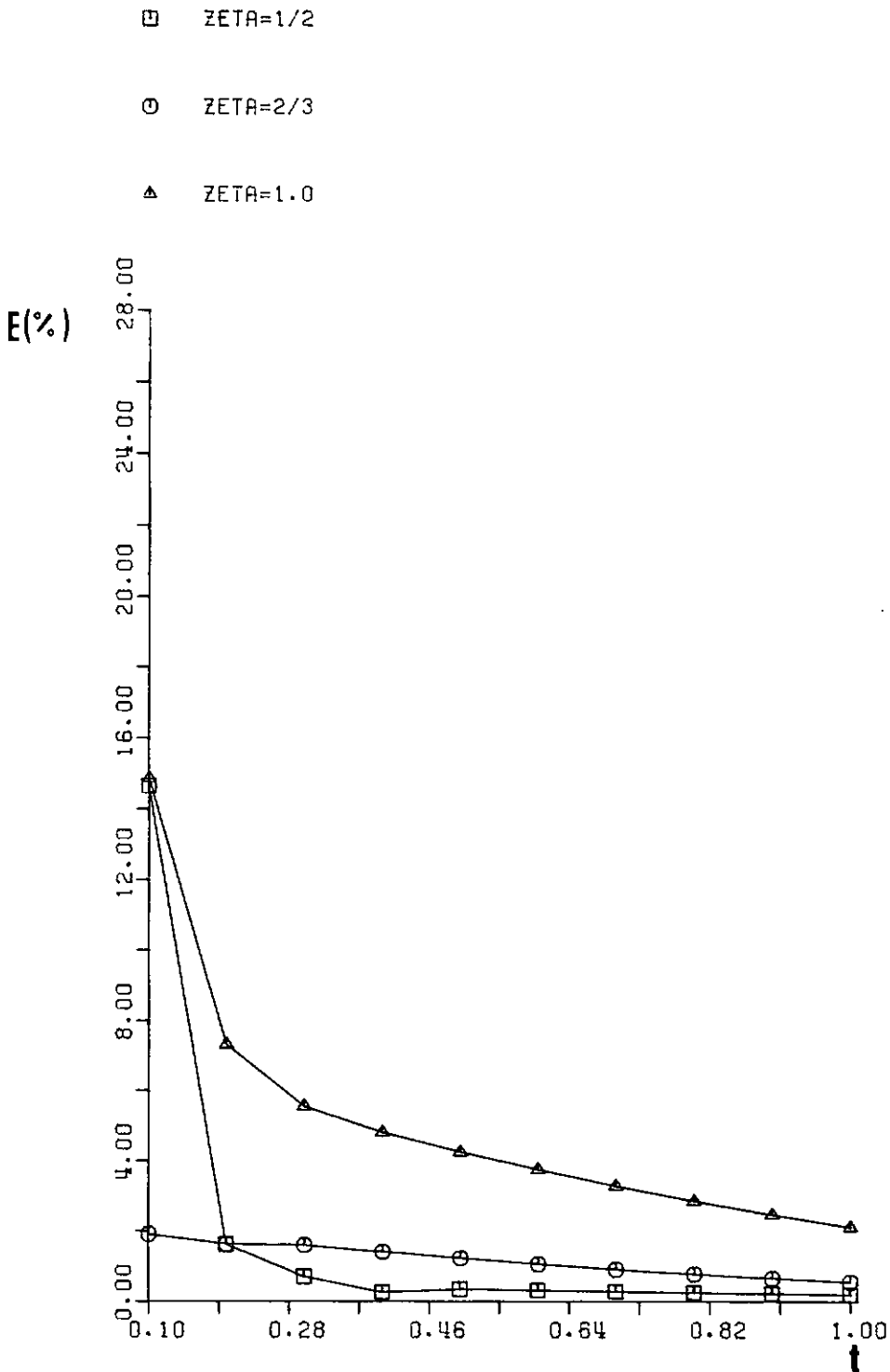


FIG.VII-24

CURVAS TEMPO X ERRO - EXPANSÃO CUBICA

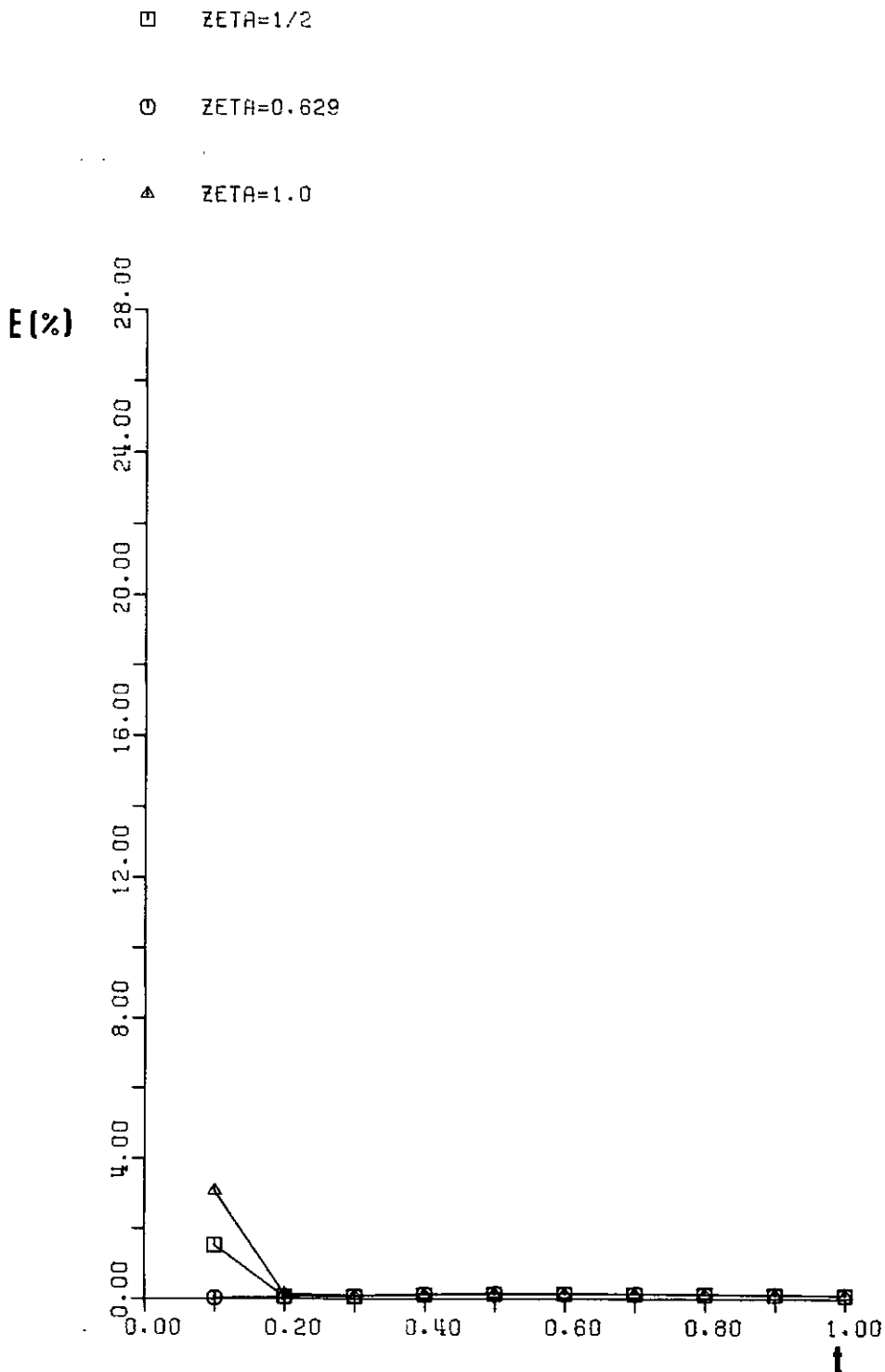


FIG. VH-25

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X ERRO MEDIO

□ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

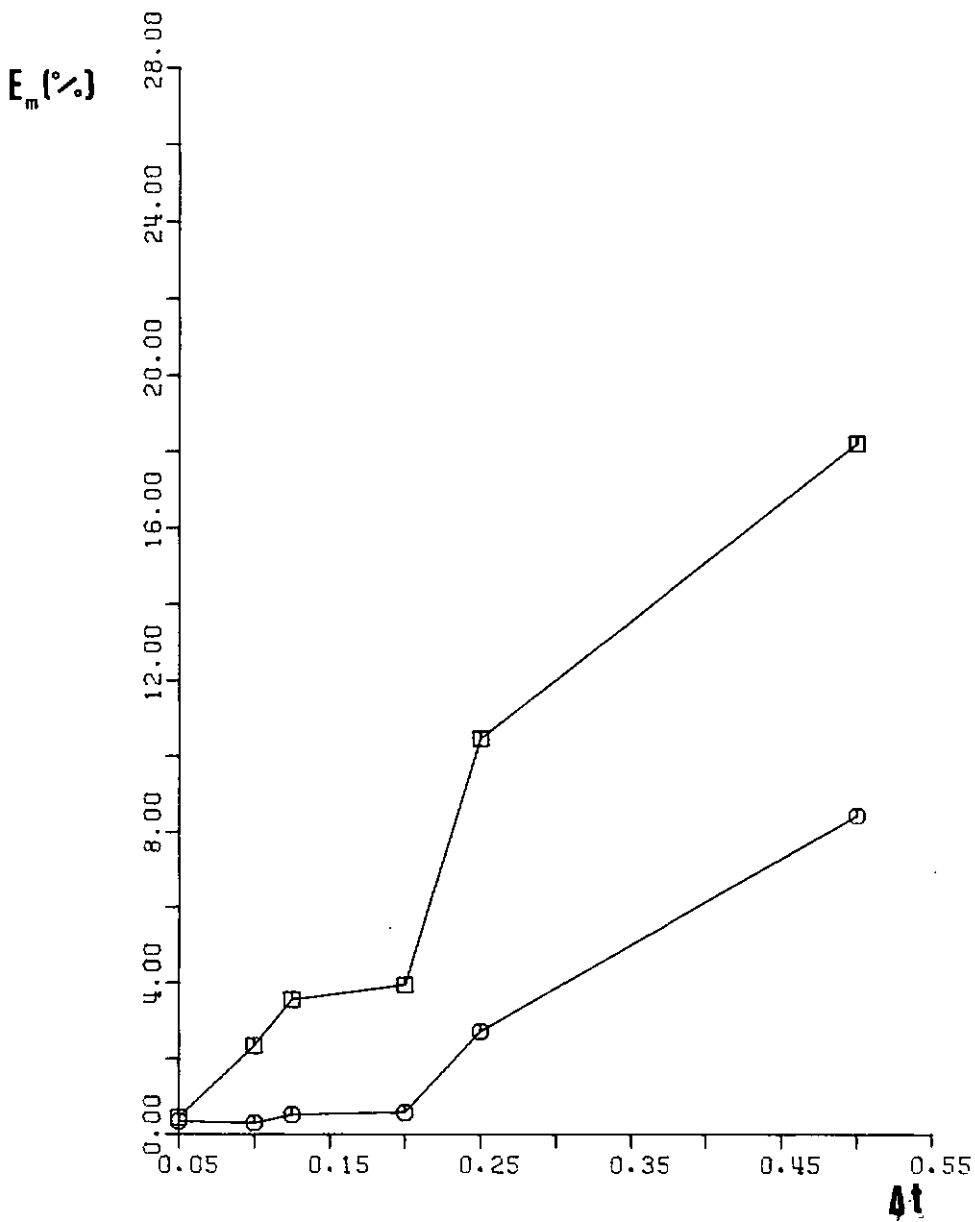


FIG.VII-26

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X TEMPO DE PROCESSAMENTO

□ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

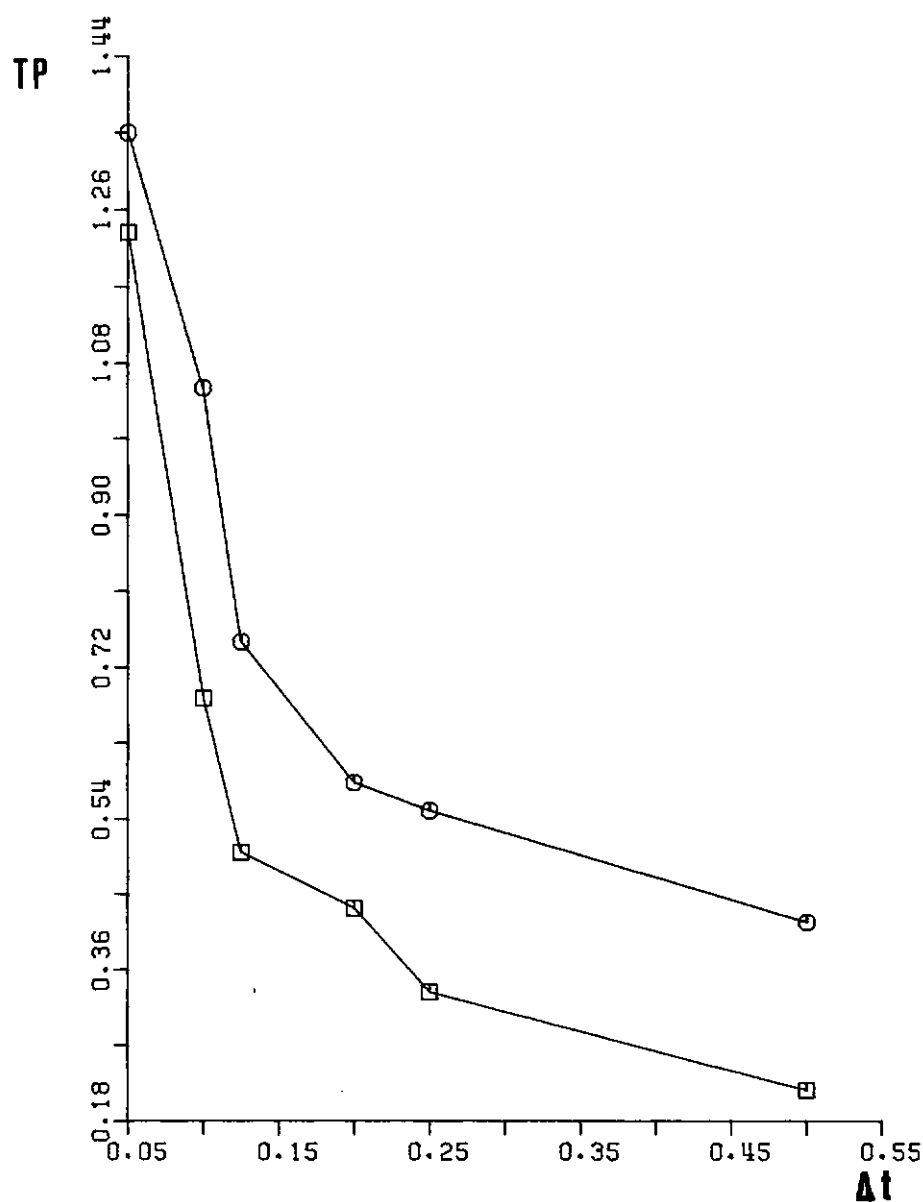


FIG. VII-27

CURVAS ERRO MEDIO X TEMPO DE PROCESSAMENTO

□ EXPANSÃO LINEAR COM ZETA=1/2

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

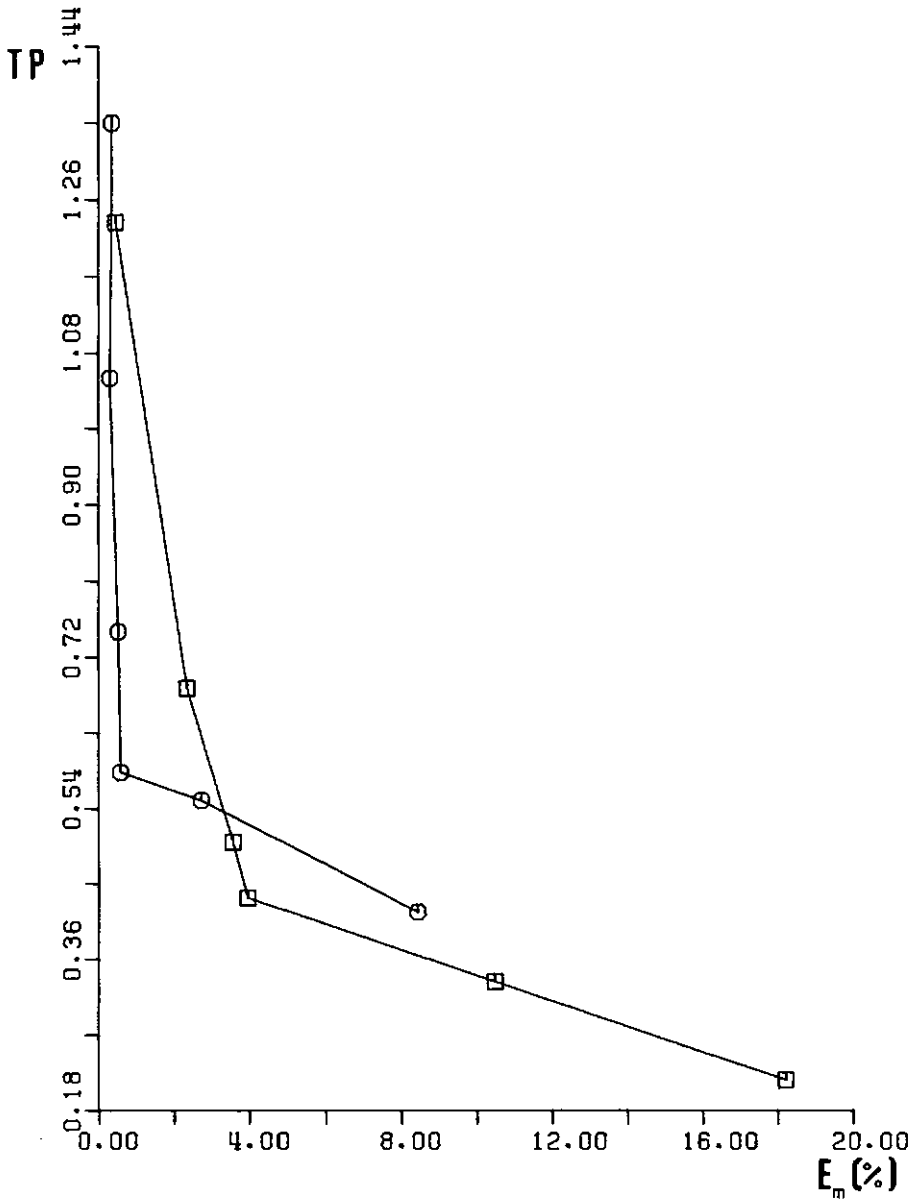


FIG.VII-28

Exemplo 4: Neste exemplo, uma parede de concreto é subitamente exposta a um gás quente a uma temperatura T_g . A temperatura inicial da parede é T_0 e o coeficiente de transmissão de calor no lado quente é h . O outro lado da parede está completamente isolado (ver figura VII-29).

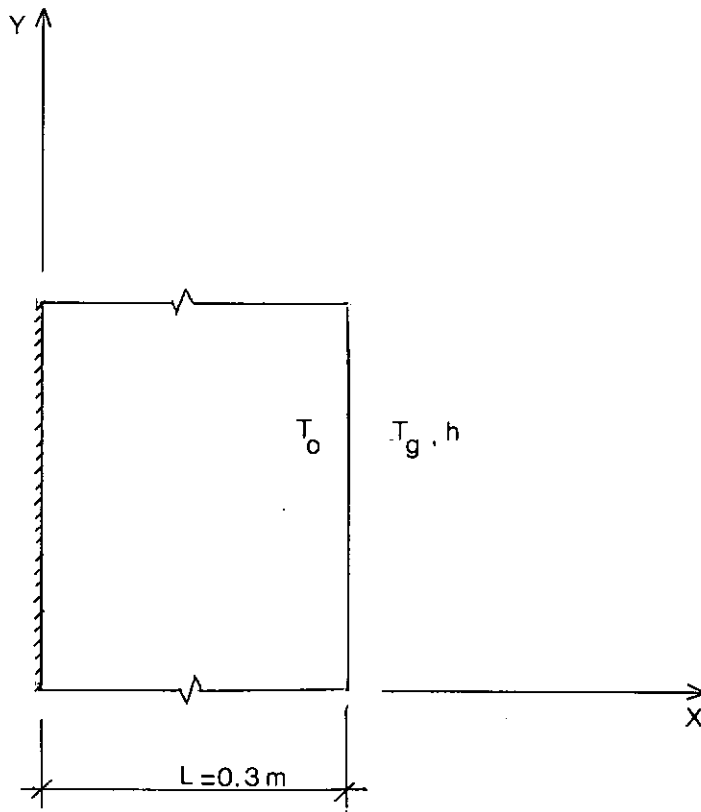


FIG. VII-29 - ESTRUTURA DO EXEMPLO 4.

Os seguintes valores foram adotados:

$$K_{\ell} = 0.9368 \text{ W/m } ^{\circ}\text{C}$$

$$c = 0.8374 \text{ KJ/kg } ^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 2307 \text{ Kg/m}^3$$

$$T_0 = 40^{\circ}\text{C}$$

$$T_g = 900^{\circ}\text{C}$$

$$h = 29.075 \text{ W/m}^2 \text{ } ^{\circ}\text{C}$$

$$\ell = 0.3\text{m}$$

As equações que resolvem o problema são:

$$T^* = D e^{-\lambda^2 t^*} \cos(\lambda x^*)$$

$$\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n = B_i$$

$$D = \frac{(\operatorname{sen} \lambda)/\lambda}{\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{4\lambda}}$$

onde:

$$B_i = \text{número de Biot} = \frac{h\ell}{K}$$

$$x^* = \frac{x}{\ell}$$

$$Z^* = \frac{a t}{\ell^2}$$

$$T^* = \frac{T - T_g}{T_0 - T_g}$$

$$a = \text{coeficiente de difusão térmica} = \frac{K_{\ell}}{\rho c}$$

A curva da solução analítica foi obtida considerando os seis primeiros valores para λ_n extraídos da bibliografia [9].

Para a solução numérica foi escolhida a seguinte malha:

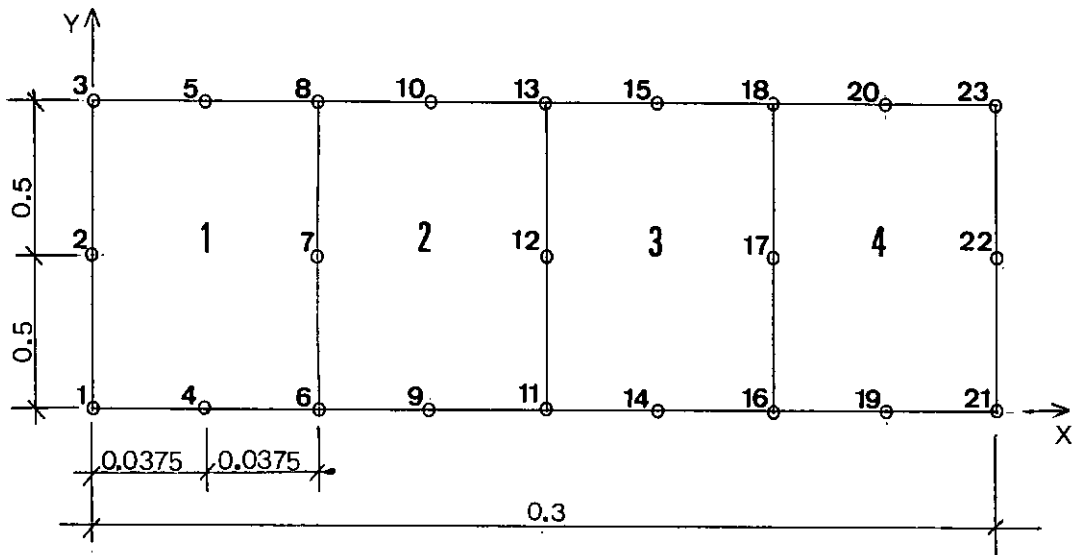


FIG. VII-30 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO 4.

Os autovalores de \underline{K} e \underline{C} foram calculadas e uma análise sobre os autovalores de \underline{A} foi feita aproximadamente, da seguinte maneira:

$$\lambda_{\max}^{\underline{A}} \approx \frac{\lambda_{\max}^{\underline{K}}}{\lambda_{\min}^{\underline{C}}} = \frac{6.9756}{0.0601} = 115.9974$$

$$\lambda_{\min}^{\underline{A}} \approx \frac{\lambda_{\min}^{\underline{K}}}{\lambda_{\max}^{\underline{C}}} = \frac{0.0233}{2.7399} = 0.0085$$

$$\frac{\lambda_{\max}^{\underline{A}}}{\lambda_{\min}^{\underline{A}}} \approx 13635.$$

Este é um exemplo típico de sistemas rígidos. Neste tipo de problema, as altas frequências são excitadas no início do intervalo de integração no tempo, exigindo pequenos intervalos de tempo, Δt , correspondentes a λ_{\max}^A . A proporção que o tempo passa, os modos térmicos fundamentais controlam o comportamento da solução, podendo ser usados intervalos de tempo maiores, correspondentes a λ_{\min}^A .

As figuras VII-31, VII-32 e VII-33 mostram as curvas tempo X temperatura para valores de Δt iguais a 2.0, 1.0 e 0.5 respectivamente. Essas curvas foram estudadas na face da parede submetida ao gás quente ($x = 0.3m$) e para um tempo de até 20 horas.

Podemos observar na fig. VII-31 que a curva para o método trapezoidal ($Zeta = 1/2$) oscila em torno da solução exata, já que para $\Delta t = 2.0$ teremos um valor de $\lambda_{\max} \cdot \Delta t \gg 2.0$. Ao contrário, o algoritmo Backward ($Zeta = 1$) amortece bem as altas frequências, apresentando para o mesmo intervalo de tempo Δt , uma solução melhor que a do método trapezoidal. Porém, a medida que diminuo o intervalo de tempo Δt , (figuras VII-32 e VII-33), o método trapezoidal passa a apresentar soluções melhores que o algoritmo Backward.

Logo, para um estudo de sistemas rígidos é importante fazer uma escolha cuidadosa do intervalo de tempo Δt e do algoritmo a utilizar, dependendo do ponto de intervalo de integração no tempo onde se deseja estudar o problema. É conveniente, nestes tipos de problemas, variar o intervalo de tempo Δt . Por exemplo, começar com um pequeno valor para Δt , o qual é aumentando gradativamente a proporção que o tempo cresce. Dessa forma,

conseguiremos manter uma boa precisão do algoritmo em todo o regime de integração, além de reduzir consideravelmente os custos computacionais, quando a solução precisa ser estendida por longos intervalos de tempo.

As figuras VII-34 a VII-36 ilustram o comportamento dos tres algoritmos ($Zeta = 1/2, 0.629$ e 1.0), expansão cúbica, para os mesmos valores do intervalo de tempo ($\Delta t = 2,1$ e 0.5) e para o mesmo ponto $x = 0.3m$. A expansão cúbica desses algoritmos apresenta uma precisão bem acima da expansão linear, além de não apresentar oscilação para os algoritmos trapezoidal e de Galerkin. Neste caso, o método Backward apresenta um ligeiro comportamento oscilatório (figura VII-34) já que para $\Delta t = 2$ obtemos um valor de $\lambda.\Delta t$ maior que 3.

CURVAS TEMPØ X TEMPERATURA-INTERVALØ DE TEMPØ=2.0

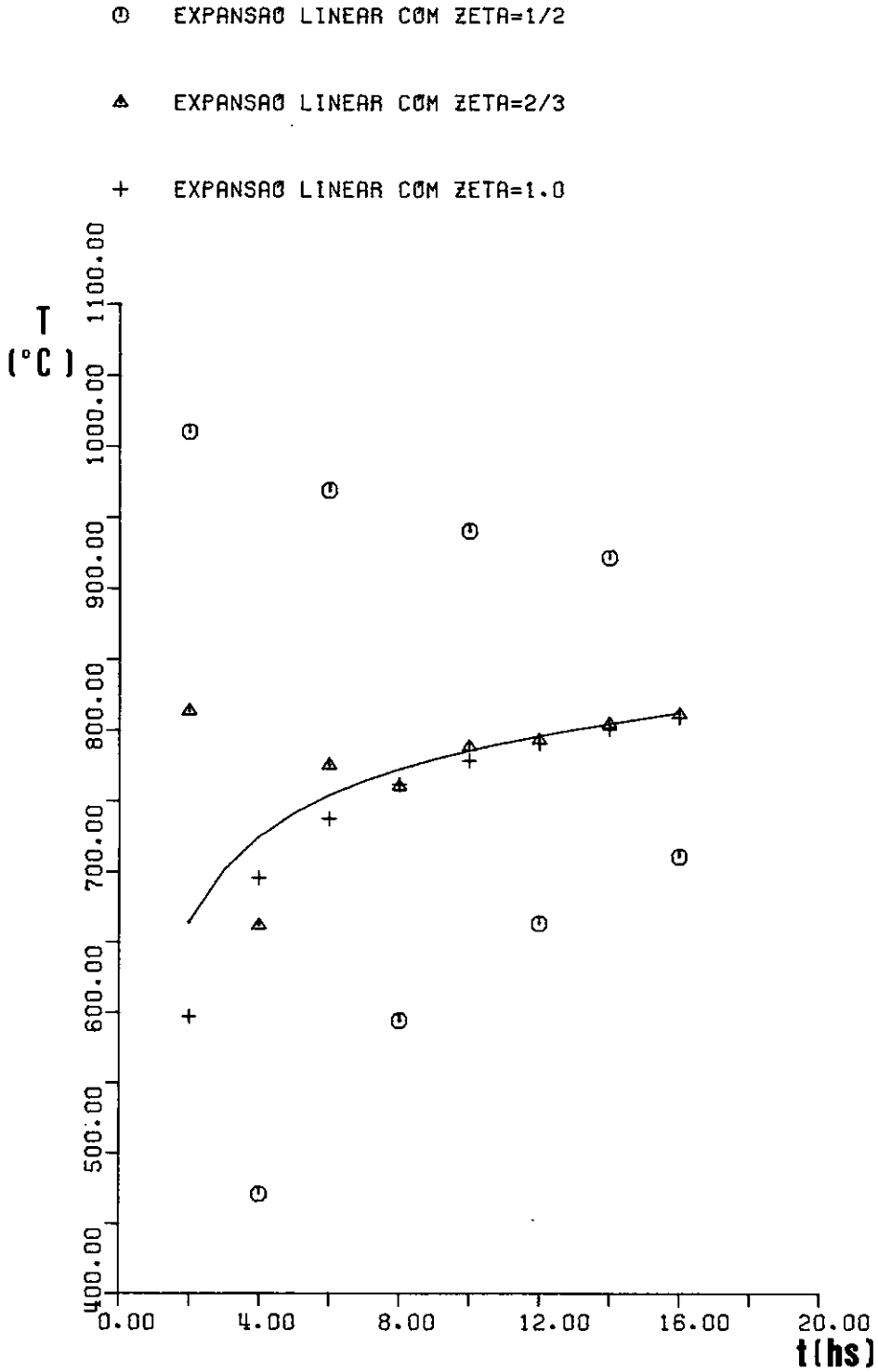


FIG.VII-31

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=1.0

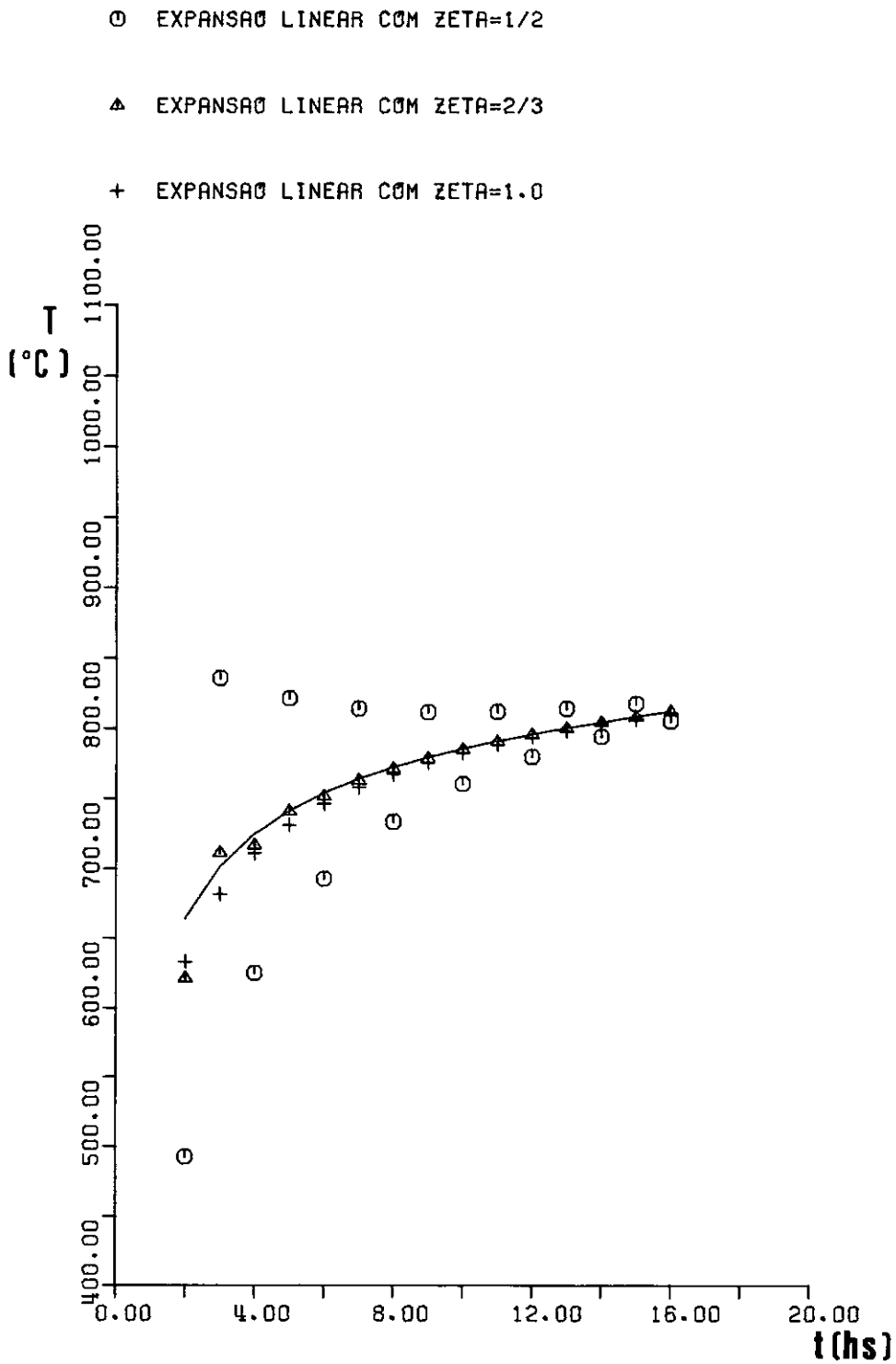


FIG.VII-32

CURVAS TEMPØ X TEMPERATURA-INTERVALØ DE TEMPØ=0.5

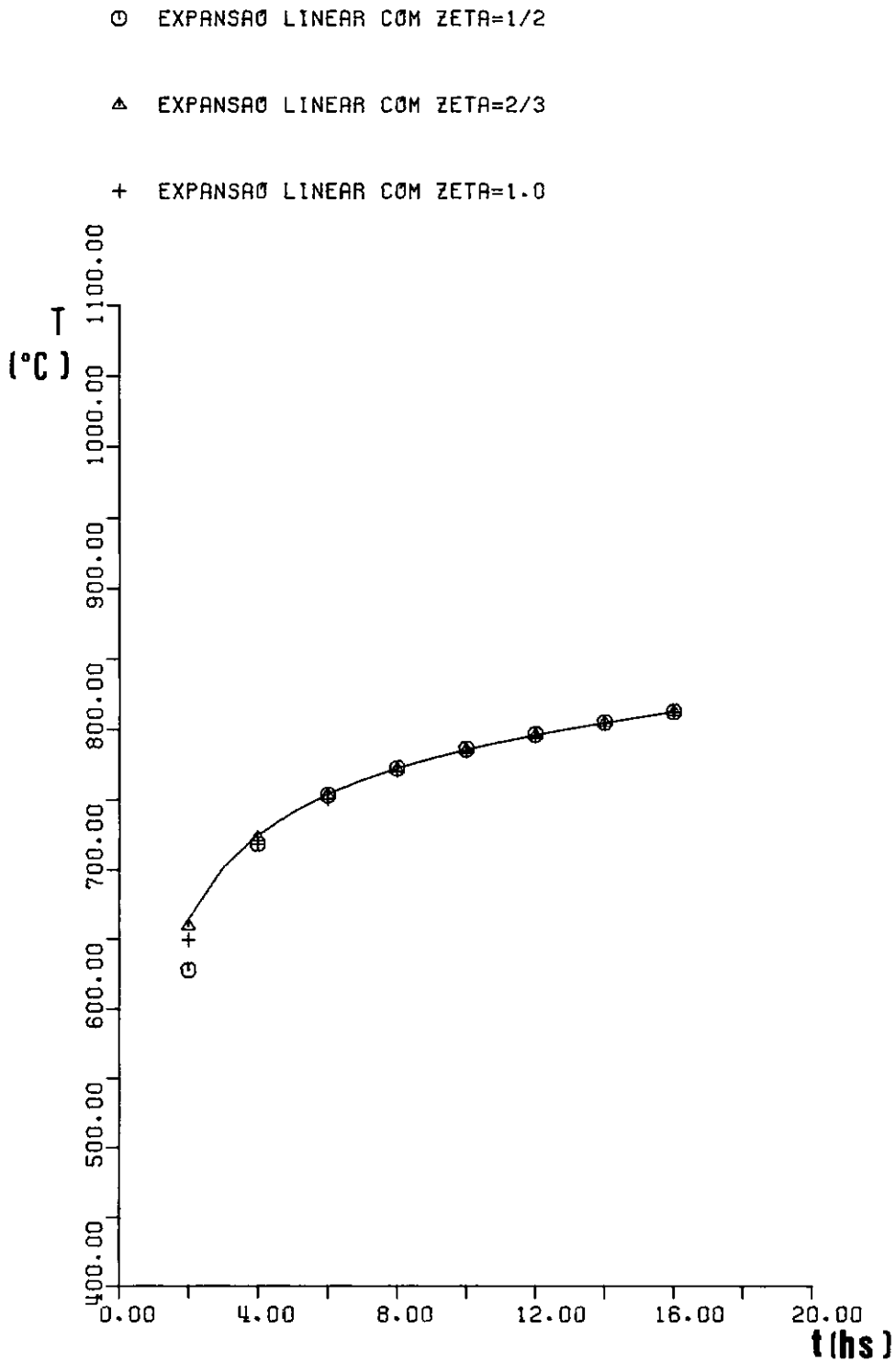


FIG.VII-33

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=2.0

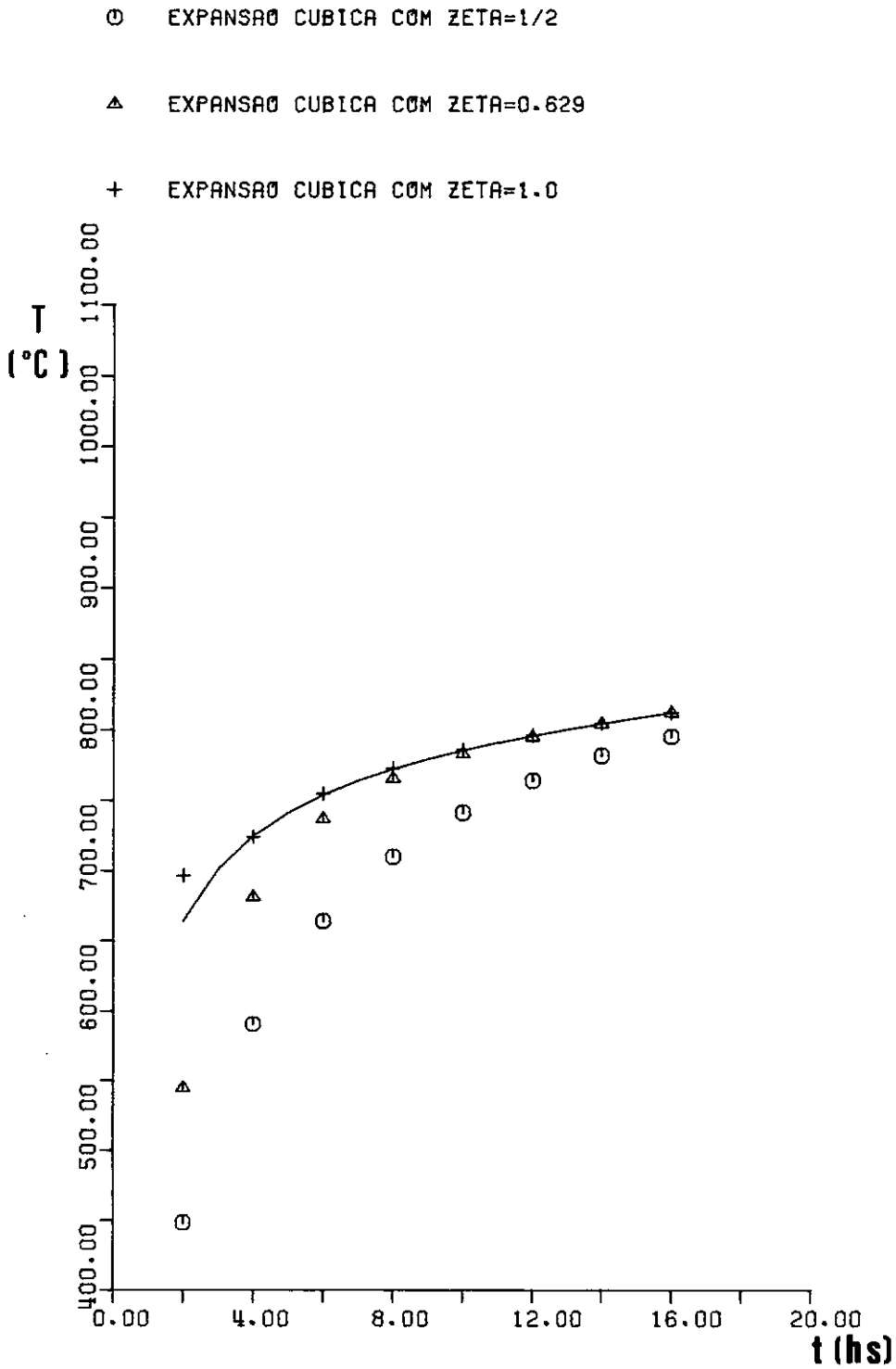


FIG.VII-34

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=1.0

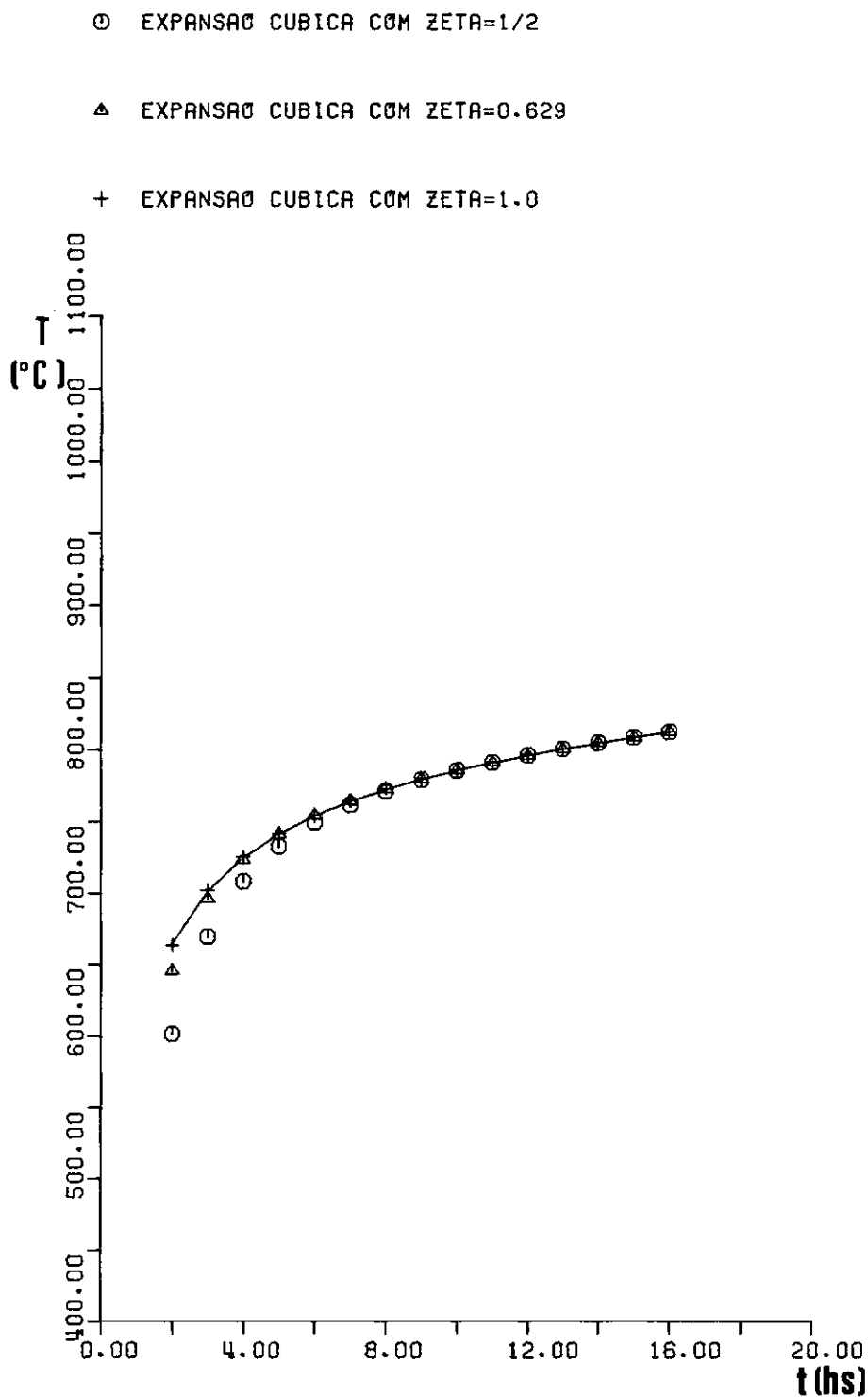


FIG. VII-35

CURVAS TEMPO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=0.5

○ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1/2

△ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=0.629

+ EXPANSÃO CUBICA COM ZETA=1.0

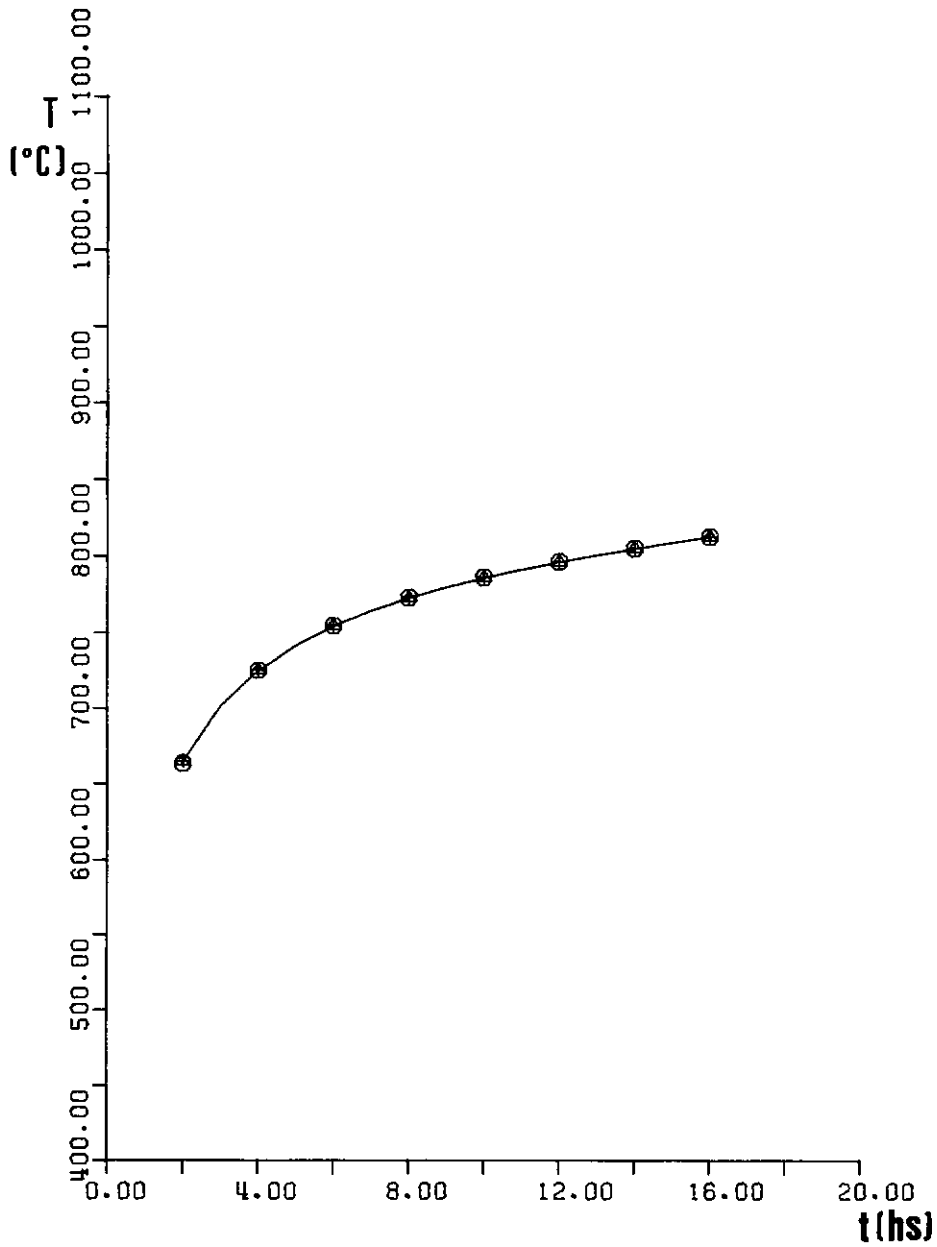


FIG.VII-36

Exemplo 5: Este é o primeiro exemplo de aplicação prática da tese.

Os componentes mecânicos (estrutura) de uma usina nuclear, precisam ser dimensionados não só, através das cargas operacionais que sobre eles atuam, como também para resistir a vários ciclos de resfriamento que por ventura sejam necessários.

Um resfriamento de emergência desses componentes introduzem temporariamente altos gradientes de temperaturas, os quais são responsáveis por concentrações locais de tensões e consequentemente, responsáveis por deformações irreversíveis.

Este exemplo foi baseado num estudo experimental feito no MPA da Universidade de Stuttgart. Neste estudo um bloco de metal foi aquecido uniformemente a uma temperatura de 320°C . Após isto, um jato de água a 20°C é atirado sobre uma área de contato do bloco de 1cm de diâmetro.

A malha idealizada para o plano médio do bloco sob o ponto de contato do jato de água, simulando o restante do corpo através de condições de contorno apropriadas, pode ser vista na figura VII-37. Nesta figura também está representada a distribuição estática de temperatura na placa para um tempo igual a 600 segundos.

A análise térmica transiente, considerando o coeficiente de transferência de calor com o meio ambiente, foi iniciada com um intervalo de tempo de 0.002 segs., este intervalo foi aumentado gradualmente até 1, 10, 100 e finalmente 600 segs., permitindo uma análise para estudo do processo térmico até 1200

segs., usando 8 intervalos de tempo. Contudo, como esperado, não ocorreram mudanças significantes da temperatura após 100 segundos.

As constantes físicas para o problema, tiradas de [20], são:

$$K_{\ell} = 46.046 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$$

$$\rho = 78.5 \text{ Kg/m}^3$$

$$c = 0.4941 \text{ KJ/Kg}^{\circ}\text{C}$$

$$h = 1.6744 \times 10^4 \text{ W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$$

Para estudo da eficiência computacional dos algoritmos hermitianos, regra trapezoidal ($\zeta=1/2$), foi escolhido o nó 142 da malha de elementos finitos e os seguintes intervalos de tempo: $\Delta t = 10, 5, 2$ e 1 segundo, até o tempo $t = 100$ segundos.

As figuras VII-38, VII-39 e VII-40 mostram os erros percentuais, das expansões linear e cúbica do algoritmo, ao longo do tempo. Notamos nitidamente que a dispersão dos erros da expansão cúbica é menor que da expansão linear, além dos erros da expansão cúbica caírem rapidamente para níveis toleráveis, ao longo do tempo.

A diferença entre os erros médios percentuais para as expansões linear e cúbica, aumenta a medida que o intervalo de tempo (Δt) cresce, como mostra a figura VII-41. Para um intervalo de tempo de 10 segundos a expansão linear apresenta um erro médio ao longo do tempo de 18.89%, enquanto que a expansão cúbica do algoritmo apresenta um erro médio de 8.49%, portanto

quase duas vezes e meia maior. Analisando agora, os erros para $\Delta t = 15$ segs., esta diferença cresce ainda mais, sendo que a expansão linear apresenta um erro médio de 38.22% em relação a 9.76% da expansão cúbica, isto é, quase 4 vezes maior.

Apesar da grande precisão apresentada pela expansão cúbica do algoritmo, o tempo de processamento (TP) gasto e os custos computacionais avaliados também são superiores, tornando na maioria das vezes inviável a sua aplicação para problemas lineares de muitos graus de liberdade. Isto pode ser verificado nas figuras VII-42 e VII-43.

Neste exemplo em particular, é interessante notar que se desejamos obter a solução estacionária com certa precisão, isto é conseguido rapidamente, para grandes intervalos de tempo e com poucos passos, pela expansão cúbica, com custos menores já que nesta expansão o erro decresce rapidamente ao longo do tempo.

CURVAS TEMPO X ERRO - INTERVALO DE TEMPO=20 SEG

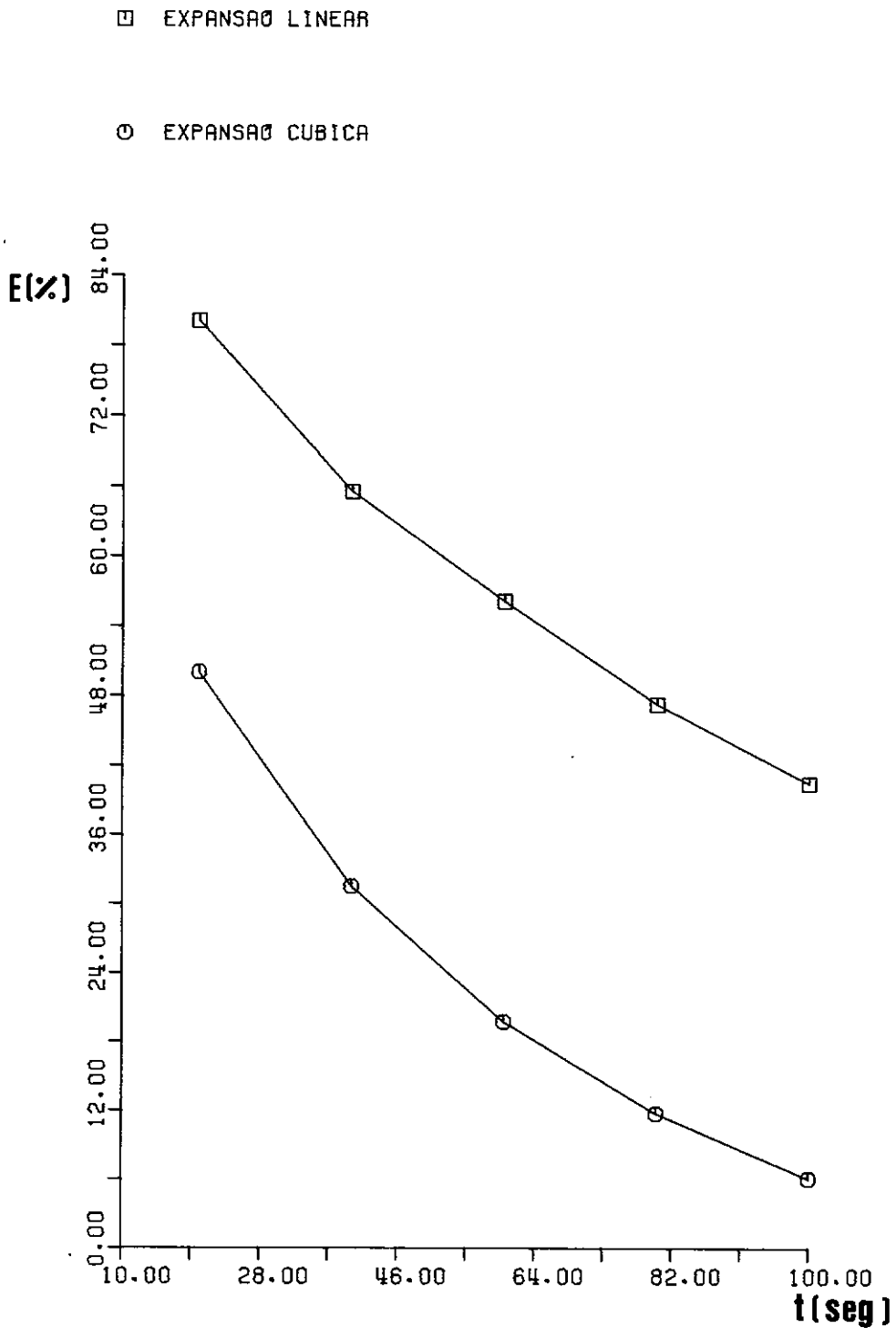


FIG.VII-38

CURVAS TEMPO X ERRO-INTERVALO DE TEMPO=15 SEG

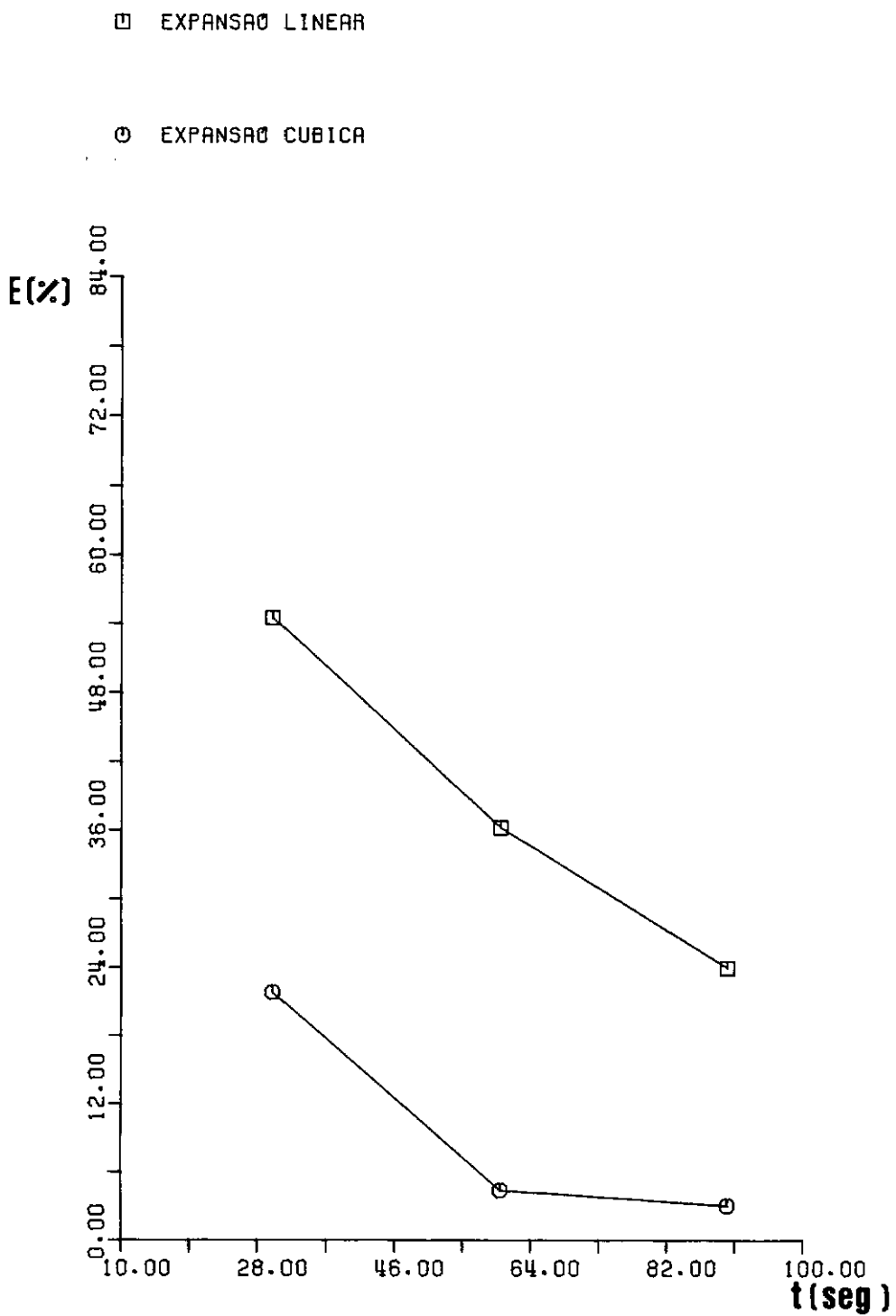


FIG.VII-39

CURVAS TEMPO X ERRO - INTERVALO DE TEMPO=10 SEG

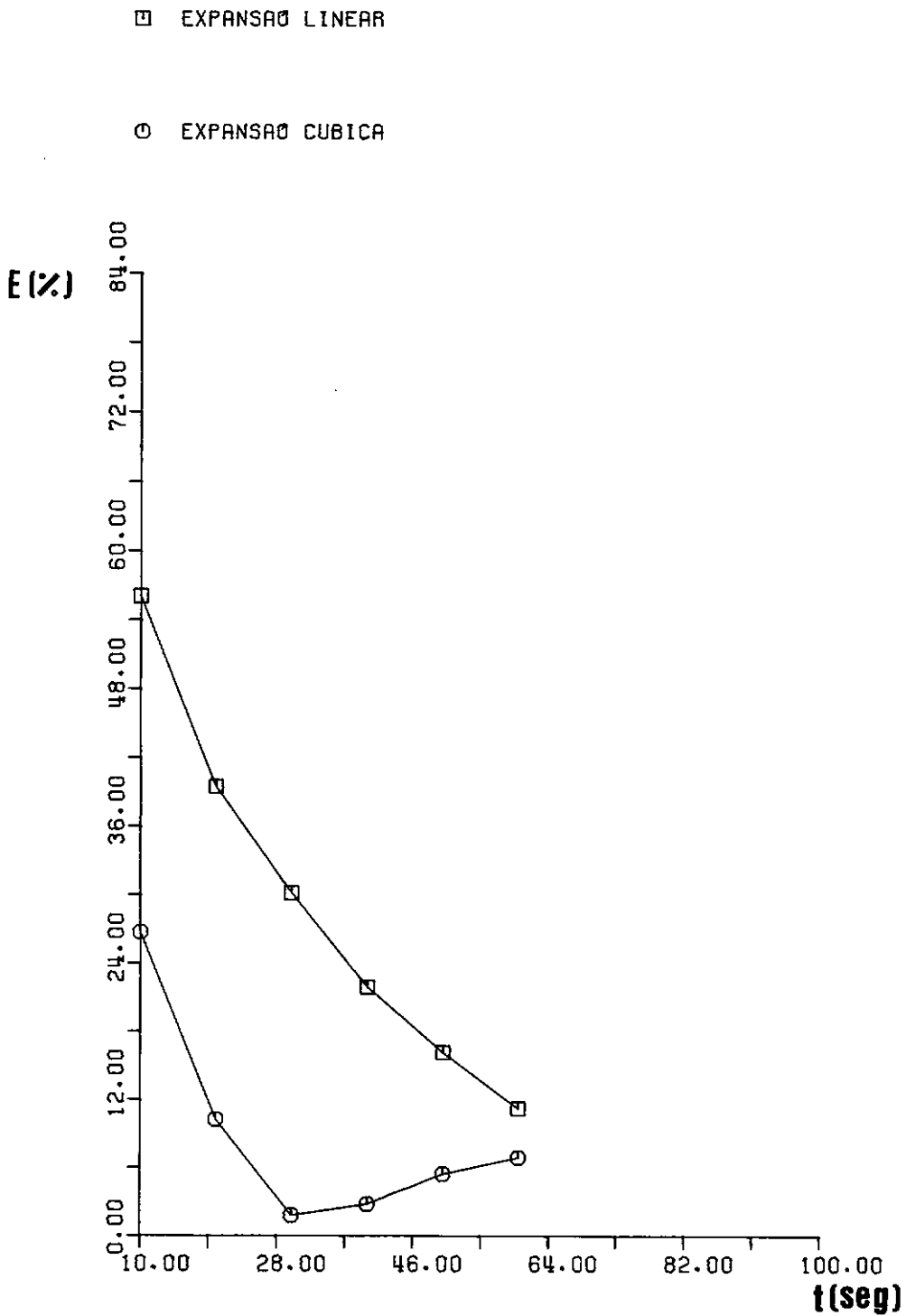


FIG.VII-40

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X ERRO MEDIO PERCENTUAL

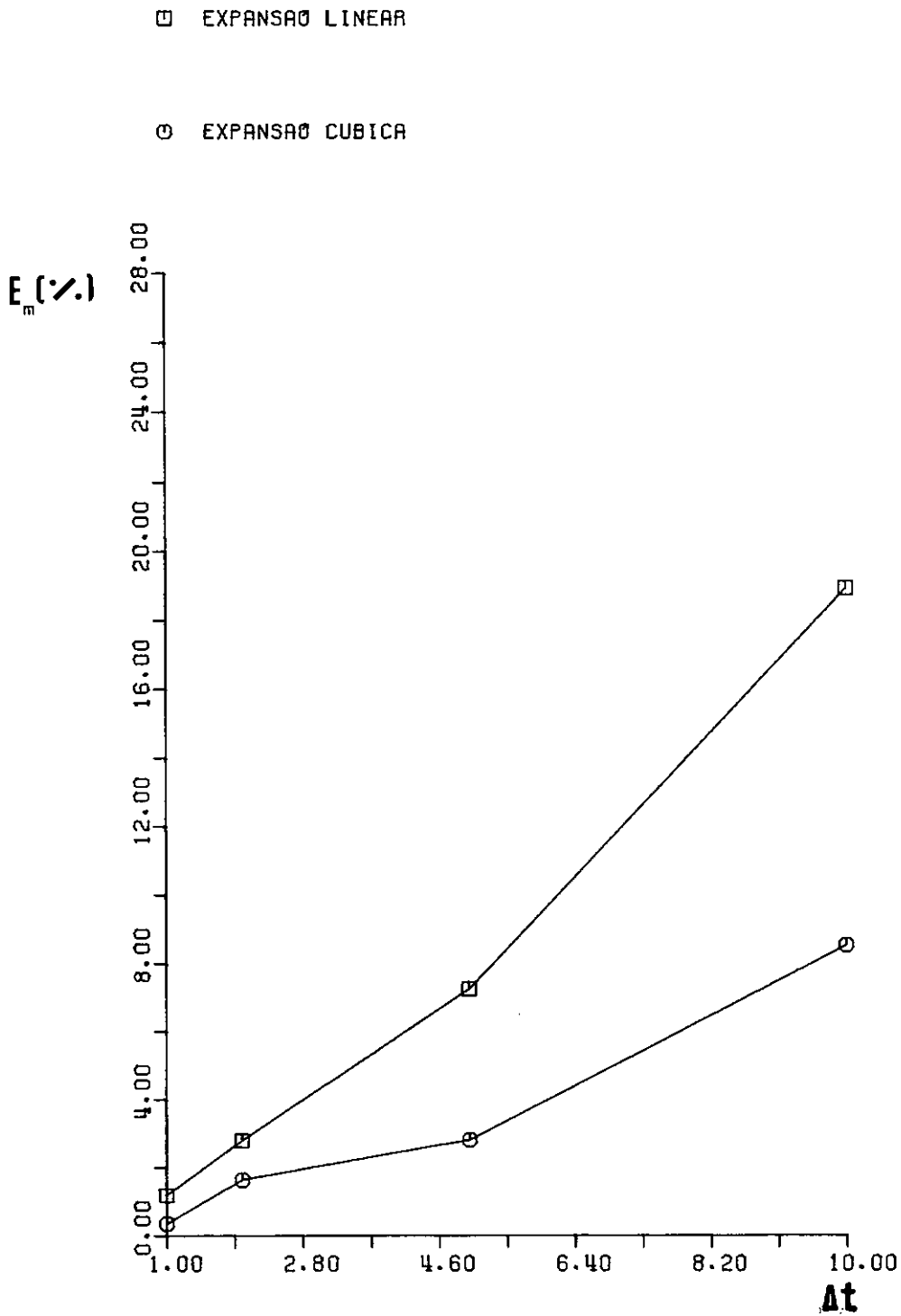


FIG. VII-41

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X TEMPO DE PROCESSAMENTO

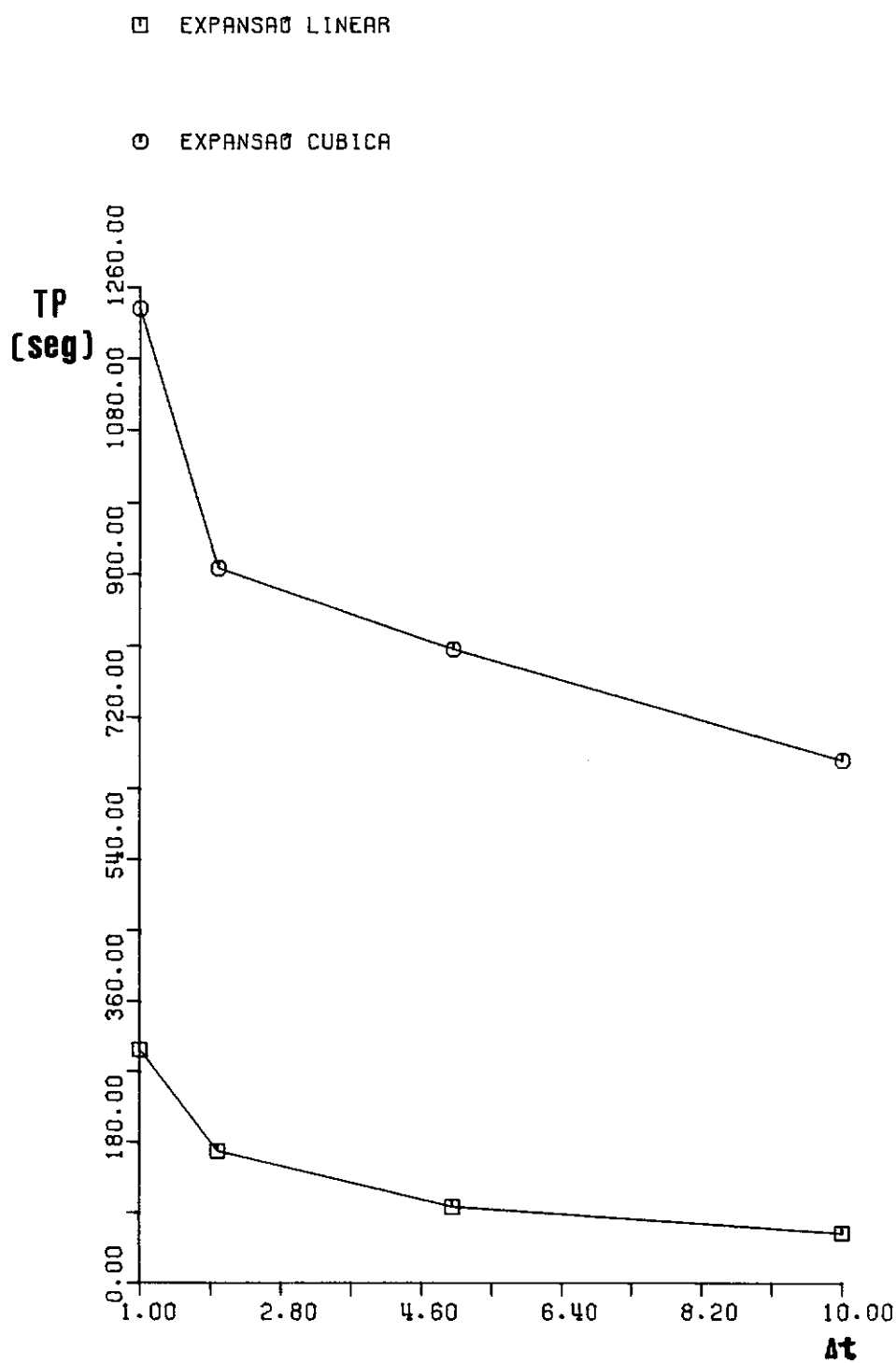


FIG. VII-42

CURVAS ERRO MEDIO PERCENTUAL X CUSTO TOTAL(USC)

□ EXPANSÃO LINEAR

○ EXPANSÃO CUBICA

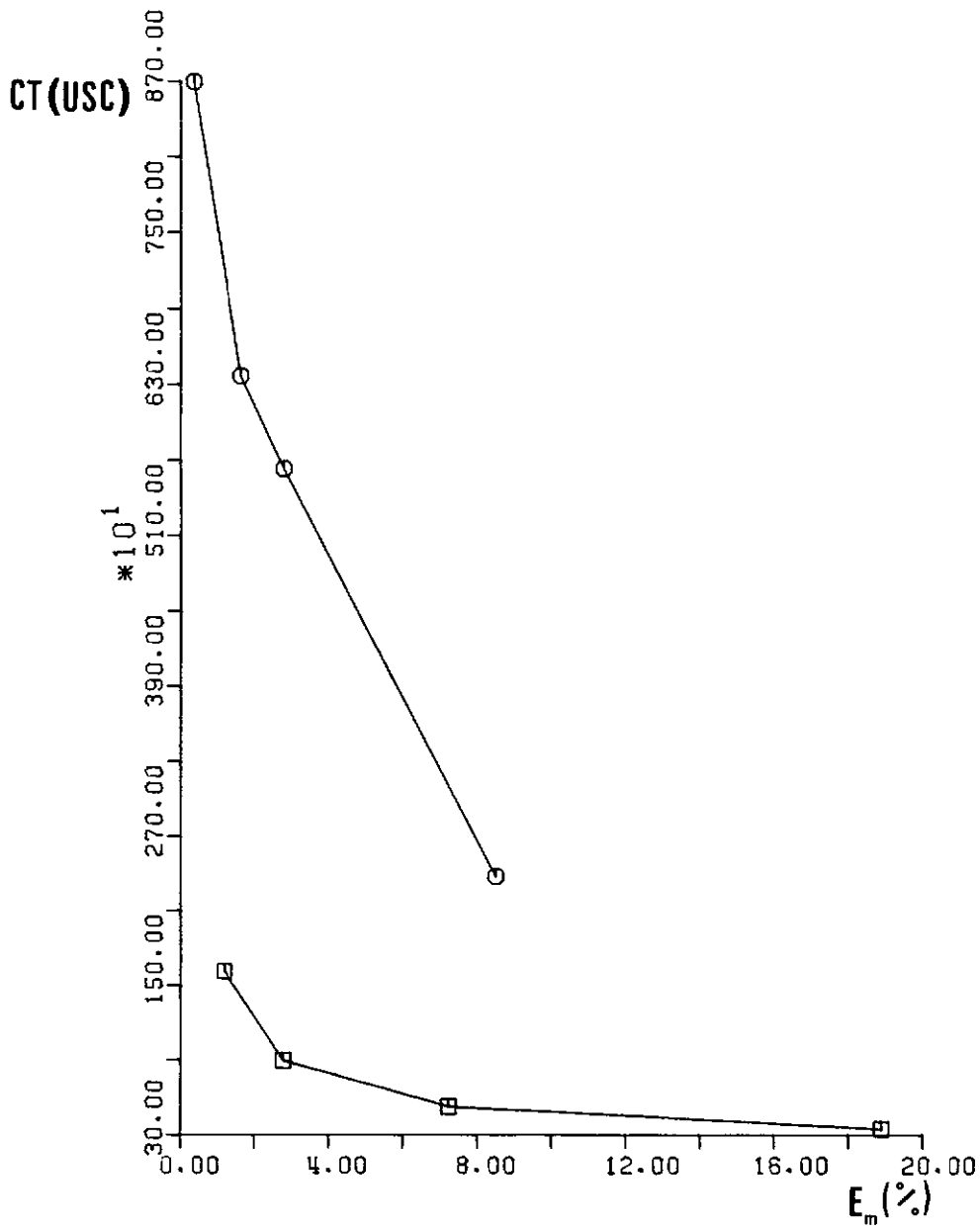


FIG. VII-43

Exemplo 6: Neste segundo exemplo de aplicação prática, o programa "HEAT" foi usado para calcular a distribuição de temperatura, ao longo de uma parede de concreto do prédio de um reator nuclear, após um acidente de perda de resfriamento (LOCA: Loss-of-coolant accident).

É importante determinar esta distribuição de temperatura após o acidente, para posterior cálculo da estabilidade da estrutura de concreto do reator.

A estrutura do exemplo é uma parede espessa de concreto que está localizada no tanque de armazenamento de combustível e que está em contato com água de ambos os lados. Para efeito de cálculo, o aumento da temperatura da água do tanque após o acidente, foi assumido igual para os dois lados da parede e pode ser visto na figura VII-44.

Após "LOCA", o sistema de resfriamento do tanque de armazenamento do combustível é interrompido. Com isso, a temperatura da água que inicialmente era de 28°C , atinge 80°C , 15 horas após o acidente. Neste momento, um segundo sistema de segurança é acionado automaticamente e a temperatura do tanque volta a baixar. Ver figura VII-44.

As propriedades físicas do material foram selecionadas de acordo com DIN4108 para um concreto de classe > B160 e estão listadas abaixo:

$$K_{\ell} = 0.00204 \text{ Kw/mk}$$

$$\rho = 2400 \text{ Kg/m}^3$$

$$c = 2.66688 \times 10^{-4} \text{ Kwh/KgK}$$

$$h = 1 \text{ Kw/m}^2\text{K}$$

A malha de elementos finitos escolhida, está representada na figura VII-45. Como a estrutura é simétrica, apenas metade da parede foi representada. Os elementos junto à face da parede são mais estreitos de forma a poder representar melhor o maior gradiente de temperatura nesta região da parede.

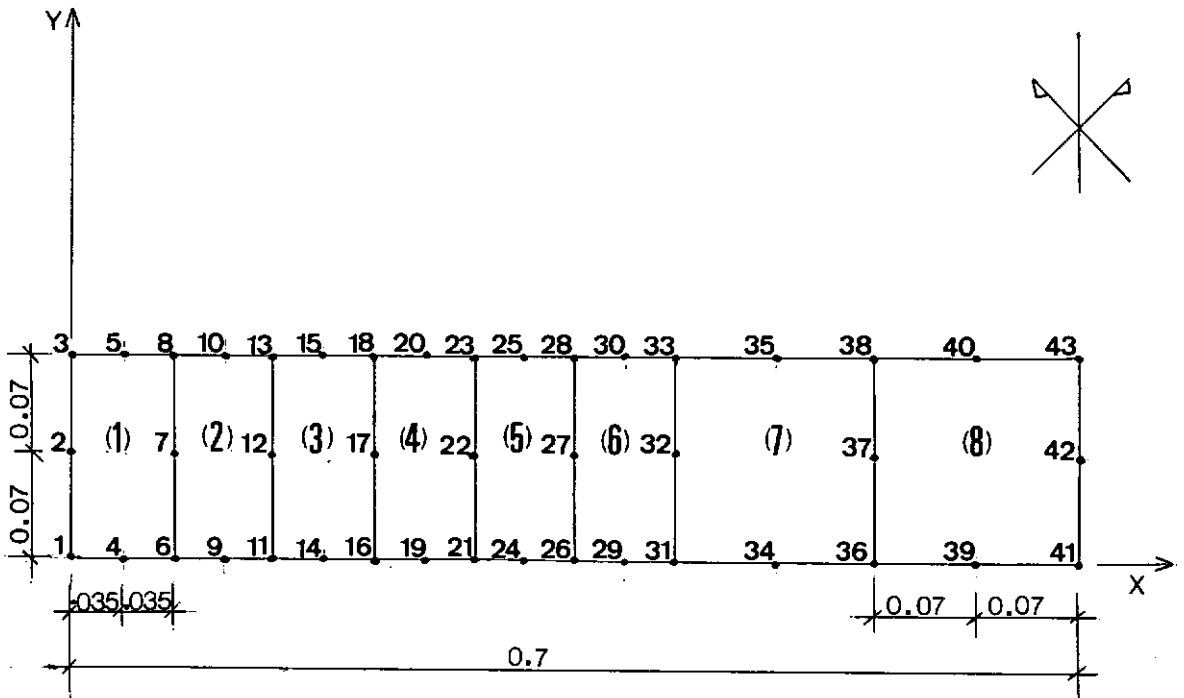


FIG. VII-45 - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO EXEMPLO 6.

Os resultados foram estudados na face externa da parede (nós 1, 2, 3), com $\zeta = 1/2$ (regra trapezoidal) e num período de até 30 horas após o acidente. Neste momento, os gradientes de temperatura na parede podem ser considerados estacionários.

Na figura VII-46 estão plotadas as curvas da distribuição de temperatura ao longo da parede, para diversos tempos e para um intervalo de tempo igual a 0.1. A distribuição inicial de temperatura é de 28°C e está representada por uma linha cheia contínua.

Para estudo comparativo dos algoritmos hermitianos foram usados os seguintes intervalos de tempo: $\Delta t = 2.5, 5.0, 7.5$ e 15 horas. A solução exata foi considerada tomando-se um intervalo de tempo igual a 0.1. Neste intervalo, as expansões linear e cúbica do algoritmo apresentaram exatamente a mesma resposta para a distribuição de temperatura.

A figura VII-47 mostra as curvas do erro percentual ao longo do tempo para as duas expansões do algoritmo e para os intervalos de tempo citados acima. É interessante notar a grande precisão apresentada pela expansão cúbica. Verificamos que mesmo aumentando o intervalo de tempo até $\Delta t = 7.5$ hs., a expansão cúbica apresentou soluções melhores que a expansão linear com $\Delta t = 2.5$ hs.. Esta diferença também pode ser observada na figura VII-48, onde estão plotadas as curvas dos erros médios percentuais para as duas expansões.

Nas figuras VII-49 e VII-50 estão as curvas comparativas do tempo de processamento gasto e do custo total respectivamente, para as duas expansões. Apesar da expansão cúbica apresentar ainda, tempos de processamento superiores à expansão linear, verificamos que esta diferença já é proporcionalmente menor que a diferença apresentada no exemplo nº 5. Daí concluímos que a medida que o problema possui menos graus de liberdade, a diferença em termos de tempo de processamento e consequentemen

te custo total diminui consideravelmente, especialmente se é exigida uma grande precisão para a resposta.

VARIACAO DA TEMPERATURA DO LAGO DO COMBUSTIVEL

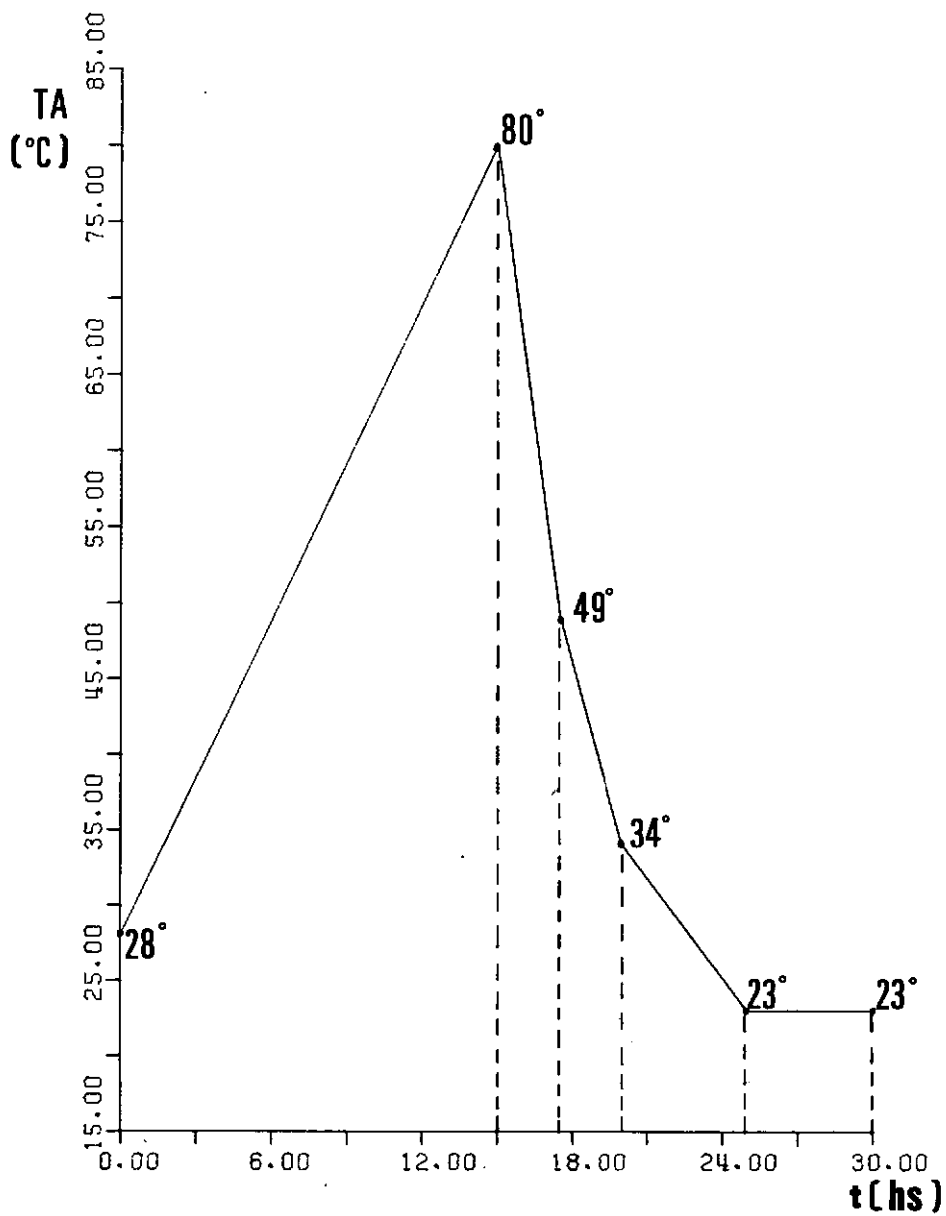


FIG.VII-44

CURVAS POSICAÇÃO X TEMPERATURA-INTERVALO DE TEMPO=.1

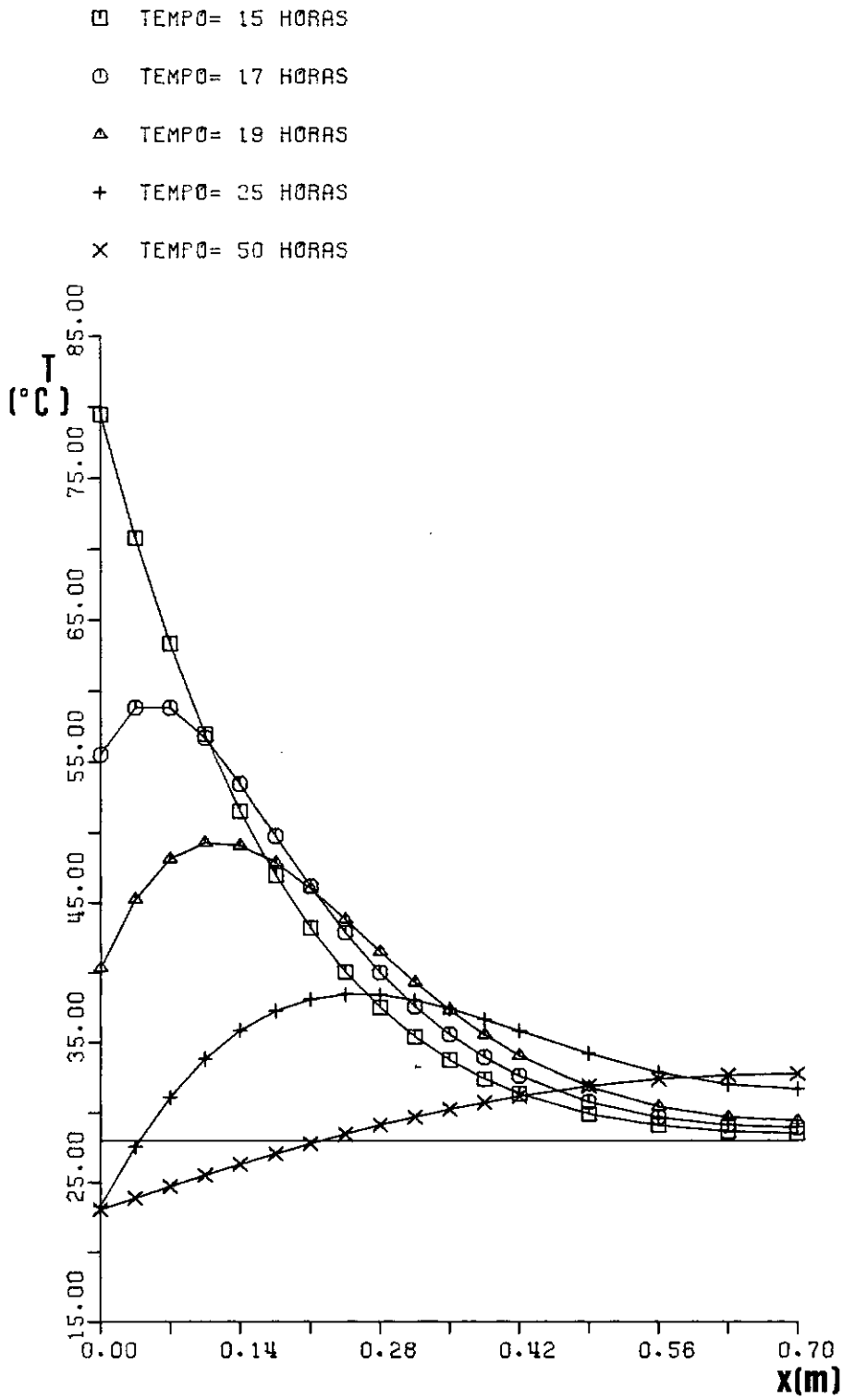


FIG. VII-46

CONVENÇÕES

— EXPANSÃO LINEAR COM ZETA = 1/2
 - - - EXPANSÃO CÚBICA COM ZETA = 1/2

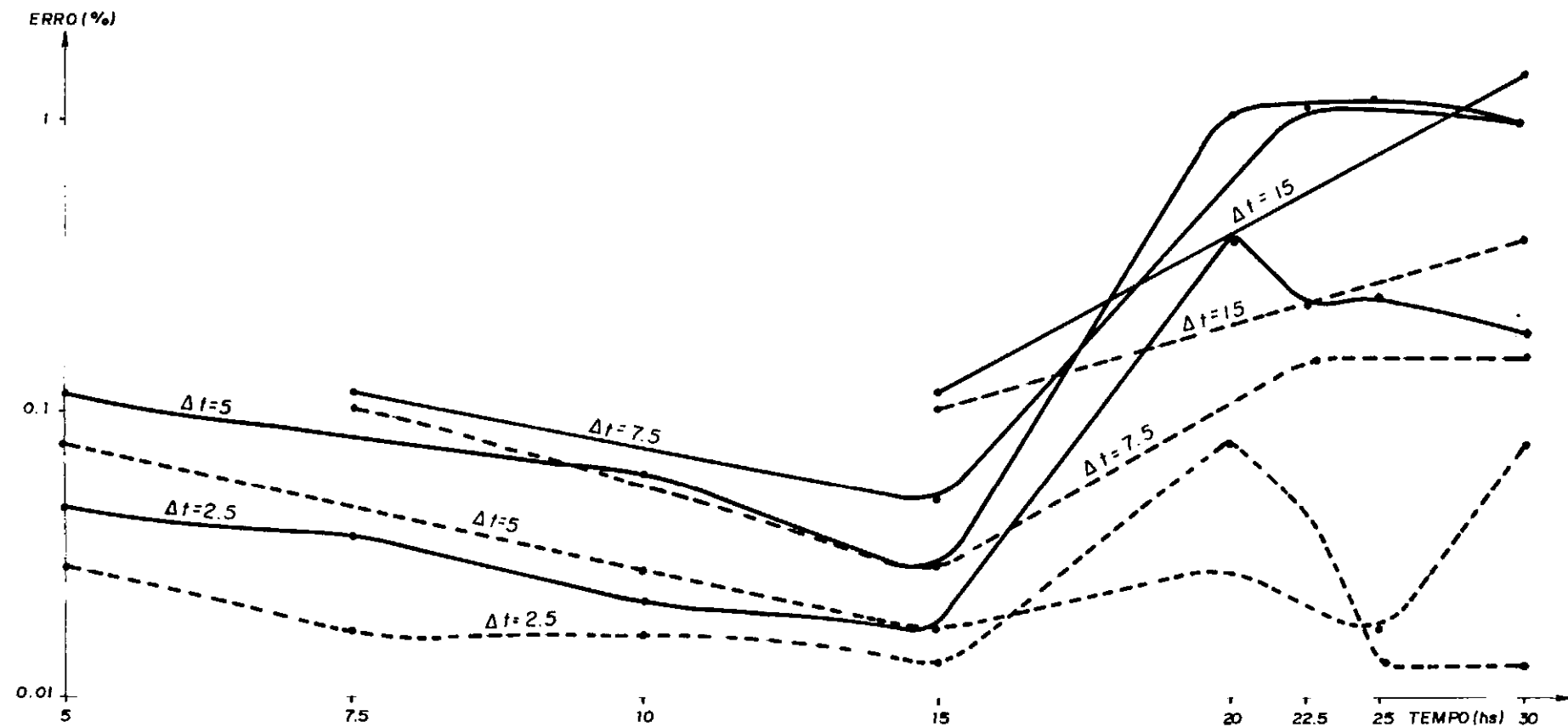


FIG. VII-47
 CURVAS TEMPO X ERRO PERCENTUAL

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X ERRO MEDIO PERCENTUAL

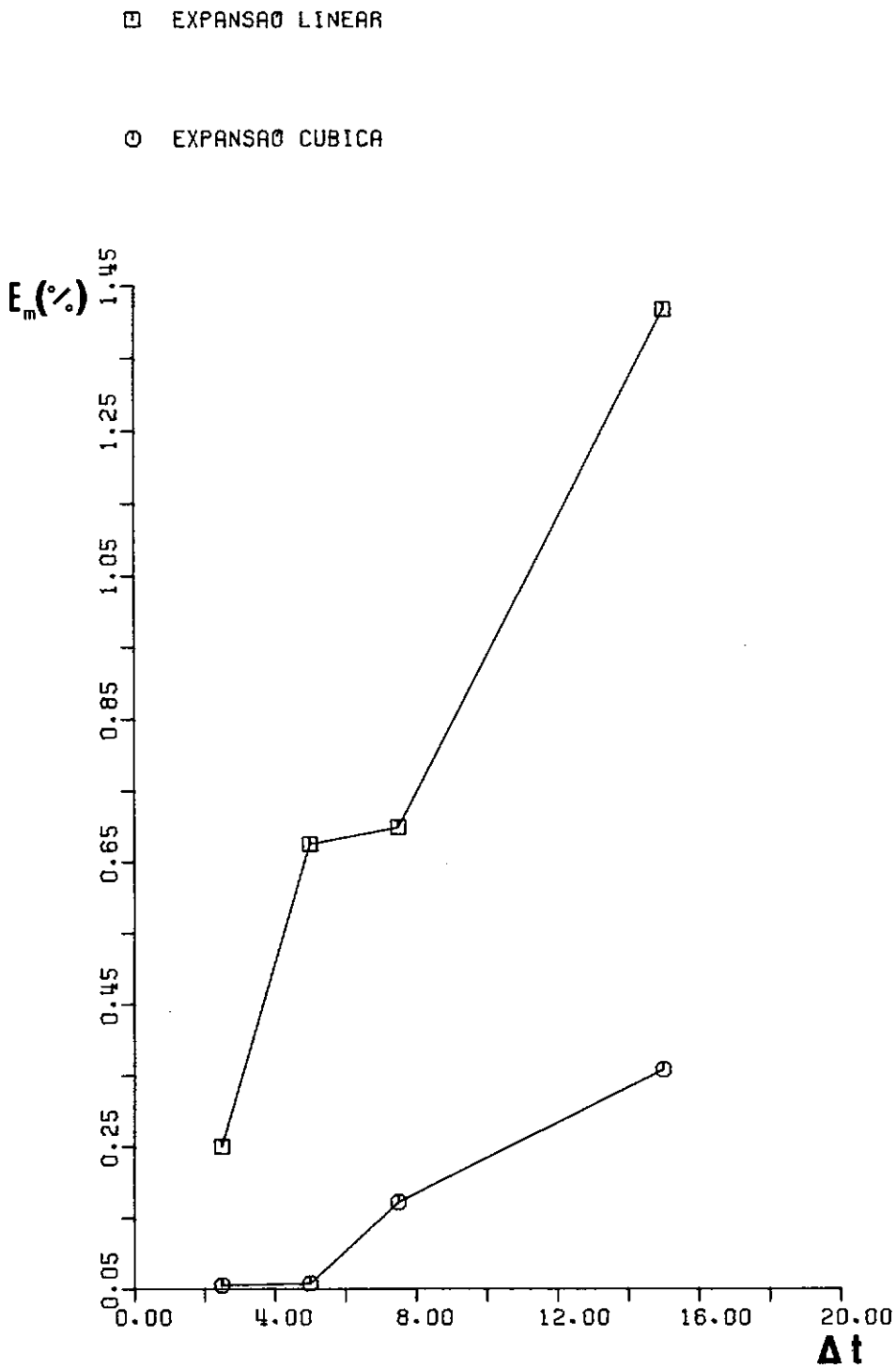


FIG. VII-48

CURVAS INTERVALO DE TEMPO X TEMPO DE PROCESSAMENTO

□ EXPANSÃO LINEAR

○ EXPANSÃO CUBICA

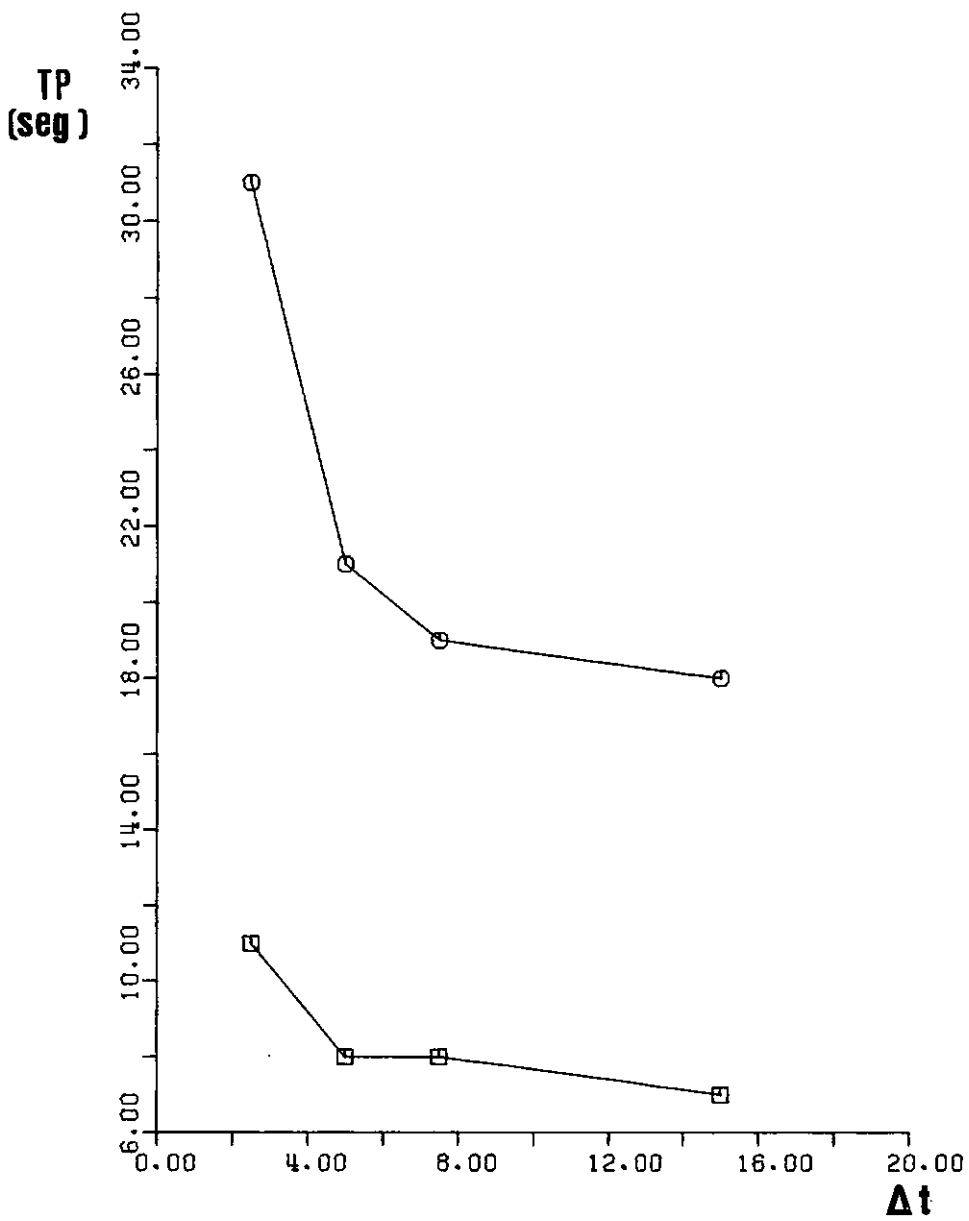


FIG. VII-49

CURVAS ERRO MEDIO PERCENTUAL X CUSTO TOTAL(USC)

□ EXPANSÃO LINEAR

○ EXPANSÃO CUBICA

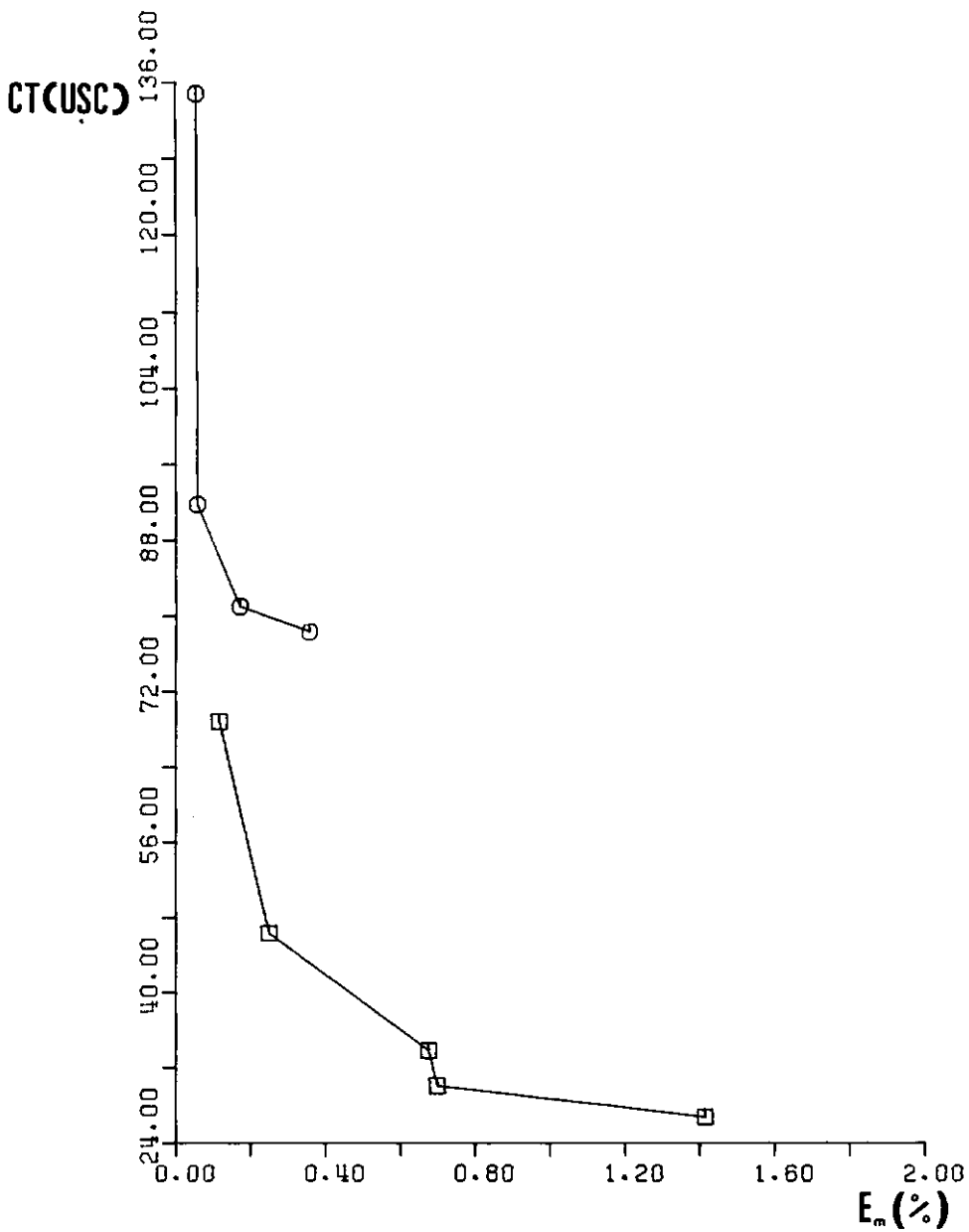


FIG. VII-50

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

Uma precisão de alta ordem foi obtida em todos os exemplos, para a expansão cúbica dos algoritmos hermitianos em relação à expansão linear.

Dentre os operadores incondicionalmente estáveis ($\zeta = 1/2, 2/3, 0.629$ ou 1), o operador cúbico com $\zeta = 1/2$ exhibe, além de um considerável aumento de precisão, uma estabilização das tendências oscilatórias da regra trapezoidal linear. Contudo, a escolha da expansão, bem como do intervalo de tempo a utilizar, vai depender do problema em estudo e do tempo onde se deseja obter a solução.

Um estudo comparativo das expansões linear e cúbica do algoritmo mostrou que apesar da grande precisão alcançada pela expansão cúbica, a perda das características de banda nos produtos $\underline{K}\underline{C}^{-1}\underline{K}$ e $\underline{C}^{-1}\underline{Q}$, necessários à implementação do algoritmo, nos leva, para problemas lineares com muitos graus de liberdade, a um elevado gasto computacional em termos de memória utilizada e de tempo de processamento sendo preferível, na maioria das vezes, o uso da expansão linear.

Uma técnica para a eliminação de \underline{A}^2 no sistema de equações algébricas lineares (VI-27) foi proposta por Serbin em [24]. Através do uso de números complexos, ele consegue manter as características de banda das matrizes e resolver o sistema de equações. Esse estudo não foi tratado no presente trabalho,

mais pode vir a ser uma alternativa para tornar mais efetiva a expansão cúbica dos algoritmos hermitianos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Argyris, J. H.; Vaz, L. E.; William, K. J. - Higher Order Methods for Transient Diffusion Analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 12: 243-278, 1977.
2. Wilson, E. L.; Nickell, R. E. - Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, Nuclear Engineering and Design; 4: 276-286, 1966.
3. Emery, A. F.; Carson, W. W. - An Evaluation of the Use of the Finite Element Method in the Computation of Temperature, Journal of Heat Transfer, ASME, 136-145, 1971.
4. Wilson, E. L.; Bathe, K. J.; Peterson, F. E. - Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer, Nuclear Engineering and Design, 29: 110-124, 1974.
5. Argyris, J. H.; Scharf, D. W. - Finite Elements in Time and Space, Aeronautic Society, 73: 1041-1044, 1969.
6. Zienkiewicz, O. C.; Parekh, C. J. - Transient Field Problems: Two-dimensional and Three-dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2: 61-71, 1970.

7. Warzee, G. - Finite Element Analysis of Transient Heat Conduction Application of the Weighted Residual Process, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3: 255-268, 1974.
8. Köhler, K.; Pittr, J. - Calculation of Transient Temperature Fields with Finite Elements in Space and Time Dimensions, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 8: 625-631, 1974.
9. Isachenko, V. P.; Osipova, V. A.; Sukomel, A. S. - Heat Transfer, Mir Publishers Moscow, 1977.
10. Comini, G.; Guidice, S. D. - Finite Element Solution of Non-Linear Heat Conduction Problems with Special Reference to Phase Change, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 8: 613-624, 1974.
11. Argyris, J. H.; Warnke, E. P.; William, K. J. - Berechnung Von Temperatur - Und Feuchtefeldern in Massivbauten Nach Der Methode Der Finiten Elemente, Institut für Statik und Dynamik der Luft - Und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, 213: 7-12, 1977.
12. Zienkiewicz, O. C. - The Finite Element Method, Mc Graw-Hill Book Company (UK) Limited, New York, 1977.
13. Argyris, J. H.; Pister, K. S.; Szimmat, J.; Vaz, L. E.; Willán, K. J. - Finite Element Analysis of Inelastic Structural Behaviour, Institut Für Statik und Dynamik

der Luft - und Raumfahrtkonstruktionen, University of Stuttgart, 225: 14-38, 1977.

14. Smith, I. M.; Siemieniuich, J. L.; Gladwell, I. - Evaluation of Norsett Methods for Integrating Differential Equations in Time, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 0: 0-00, 1976.
15. Ergatoudis, I.; Irons, B. M.; Zienkiewicz, O. C. - Curved, Isoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis, International Journal of Solids Structures, 4: 31-42, 1968.
16. Ferrante, A. J. - Curso de Mecânica das Estruturas II, COPPE/UFRJ, 1980.
17. Brebbia, C. A.; Ferrante, A. J. - Computational Methods for the Solution of Engineering Problems, Pentech Press Limited, London, 1978.
18. Clough, R. W.; Penzien, J. - Dynamics of Structures, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1975.
19. Bathe, K. J.; Wilson, E. L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
20. Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C. - Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press, Second Edition, 1959.

21. Gurtin, M. E. - Variational Principles for Linear Initial - Value Problems, Quart. Appl. Math., 22: 252, 1964.
22. Carnahan, B.; Luther, H. A.; Wilkes, J. D. - Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1969.
23. Argyris, J. H.; Doltsinis, J. St.; Knudson, W. C.; Vaz, L. E.; Willam, K. J. - Numerical Solution of Transient Non-linear Problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18: 341-409, 1979.
24. Serbin, S. M. - On a Fourth-Order Unconditionally Stable Scheme for Damped Second-Order Systems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3: 333-340, 1980.
25. Köhler, K.; Pittr, J. - Calculation of Transient Temperature Fields with Finite Elements in Space and Time Dimensions, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 8: 625-631, 1974.

APÊNDICE AMANUAL DO USUÁRIO DO PROGRAMA "HEAT"

O programa "HEAT" foi desenvolvido para determinar a distribuição transiente da temperatura de placas em problemas lineares, isto é, problemas onde os parâmetros físicos são constantes.

A discretização espacial da estrutura é feita pelo Método dos Elementos Finitos, e o elemento utilizado é o isoparamétrico parabólico (8 nós).

A discretização no tempo é feita pelos Algoritmos Hermíticos de Integração, expansões linear e cúbica.

Os seguintes casos da condução de calor transiente são resolvidos pelo programa HEAT: placas com fonte interna de calor, condições de contorno de calor prescrito, temperatura prescrita e/ou troca de calor com o meio que cerca a estrutura. Neste último caso, a temperatura do ambiente pode ser constante ou variar linearmente com o tempo.

O programa é composto pelas seguintes subrotinas:

- DADOS - leitura e impressão dos dados gerais referentes à estrutura.
- FAIXA - cálculo e impressão da semi-largura de banda (LF) das matrizes de condutividade e capacidade térmicas.
- CARRE - leitura e impressão dos carregamentos da estrutura.

- MATRIX - formação das matrizes de condutividade térmica, capacidade térmica e do vetor de cargas térmicas para o elemento.
- ASSEM - montagem das matrizes da estrutura.
- BOUND - introdução da condição de contorno de temperatura prescrita nas matrizes da estrutura.
- TRIAN1 - triangulariza uma matriz NEQXLF, onde NEQ é o número de equações do problema.
- RESOL1 - resolve um sistema de equações $\underline{AX}=\underline{B}$ pelo método de Gauss, onde \underline{A} é a matriz triangularizada em TRIAN1.
- HERMIL - aplicação do algoritmo hermitiano linear.
- ENCHE - transforma uma matriz NEQXLF numa matriz NEQXNEQ.
- INVER - calcula os produtos $\underline{KC}^{-1}\underline{K}$, e $\underline{C}^{-1}\underline{Q}$, necessários à aplicação da expansão cúbica do algoritmo hermitiano.
- TRIAN2 - triangulariza uma matriz NEQXNEQ.
- RESOL2 - resolve um sistema de equações $\underline{AX}=\underline{B}$ pelo método de Gauss, onde \underline{A} é a matriz triangularizada em TRIAN2.
- HERMIC - aplicação do algoritmo hermitiano cúbico.

O programa principal utiliza os vetores de trabalho \underline{A} e $\underline{A1}$ para dimensionamento das principais matrizes do programa, economizando assim, espaços na memória.

Descrição dos Dados de Entrada

- NPROB - número do problema a ser rodado. Se NPROB=0, a execução do programa é terminada.

IVTA - Se IVTA=1, a temperatura do ambiente é constante com o tempo. Se IVTA=n($\neq 1$), a temperatura do ambiente varia linearmente com o tempo e n é o número de colunas da matriz que determina a temperatura em cada tempo, montada pelo programa.

TIT1 - título do exemplo a ser resolvido.

NNOS - número de nós da estrutura.

NELMS - número de elementos da estrutura.

NTM - número de tipos diferentes de material da estrutura.

NCOOR - número de coordenadas espaciais por nó da estrutura.

NETNOS - número de nós lidos para geração automática das coordenadas dos nós.

NCODE - número de nós de fronteira carregados.

IELM1 e IELM2 - controlam a geração de incidência dos elementos.

Se numero os nós na mesma direção da numeração dos elementos então, IELM1 = 1 e IELM2 = -2. Se numero os nós numa direção e os elementos na outra direção então, IELM1 = IELM2 = diferença entre dois nós correspondentes de dois elementos consecutivos.

Obs.: O eixo X deve corresponder a direção da numeração dos elementos.

COORD(K, 1) - coordenada X do elemento de número K.

COORD(K, 2) - coordenada Y do elemento de número K.

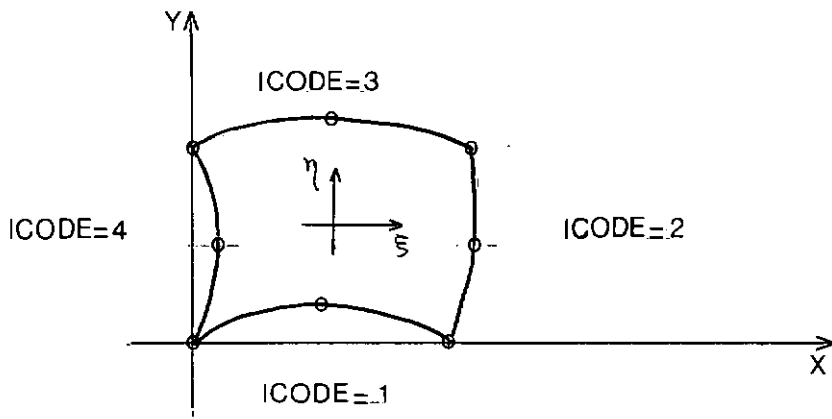
ICNO - incremento de nó para geração automática das coordenadas X ou Y (é usado também para geração dos códigos e das temperaturas prescritas).

VINCX - valor do incremento da coordenada.

NINC - número de nós que vou gerar coordenadas automaticamente a partir do nó K (é usado também na geração dos códigos e das temperaturas prescritas).

ICODE(K)- código do nó carregado.

O código do nó carregado será igual ao número do lado que ele pertence no elemento.



IELMS(K, I), I = 1, 8 - lista de incidência dos 8 nós do elemento K.

IMAT(K) - índice do material do elemento K.

THICK(K)- espessura do elemento K.

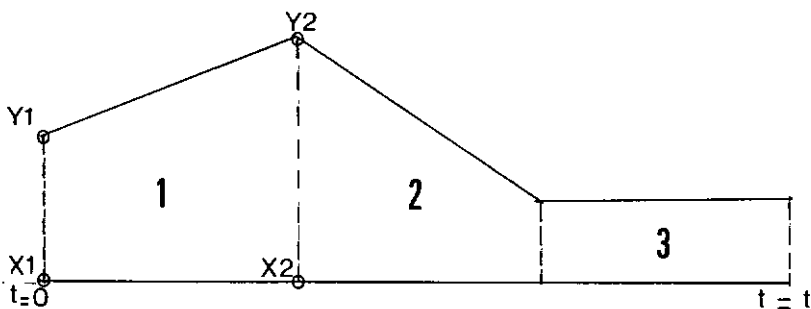
CTERM(IMAT, 1) - condutividade térmica do material (K_ℓ).

CTERM(IMAT, 2) - peso específico (ρ) x calor específico (c) do material.

NELFI - número de elementos com fonte interna de calor.

NULAC - número de lados carregados com fluxo de calor prescrito.

- NNT \bar{P} - número de nós com temperatura prescrita.
- NULETP - número de nós lidos para geração automática da temperatura prescrita.
- NULACO - número de lados com a condição de troca de calor com o meio ambiente.
- ICOQUI - Se ICOQI = 1 todos os elementos possuem fonte interna de calor igual, se ICOQUI \neq 1 posso ter cada nó de cada elemento com um valor para a fonte interna de calor.
- QINT - valor da fonte interna de calor quando ICOQI = 1.
- QI(NELC, J), J=1,8 - valor da fonte interna de calor em cada nó do elemento de número NELC, quando ICOQI \neq 1.
- N01, N02 e N03 - primeiro, segundo e terceiro nós respectivamente, carregados com calor prescrito.
- QF(N01), QF(N02) e QF(N03) - fluxos de calor prescrito nos 3 nós, do lado carregado, obedecendo a convenção de sinal adotada no capítulo IV-1.
- TP(K) - temperatura prescrita do nó K.
- NUMINT - número de intervalos com diferentes inclinações, da reta, para geração da temperatura do ambiente.



ex: NUMINT = 3

- ICONT - se ICONT=0 tenho mais de um lado com os mesmos valores para o coeficiente de transferência de calor e para a temperatura ambiente e estes são gerados automaticamente.
- CONVEC(K, L, 1, 1) - coeficiente de transferência de calor do elemento K, lado L.
- Y_1 e Y_2 - valores inicial e final da temperatura ambiente para cada intervalo NUMINT.
- X1 e X2 - valores inicial e final do tempo para cada intervalo NUMINT.
- VINCRE - incremento de tempo onde a temperatura ambiente é gerada ($=\Delta t$) dos: Se IVTA = 1 coloco:
- NUMINT = 1
- VINCRE = 0
- $Y1=Y2$ = temperatura do ambiente
- X2 = qualquer valor diferente de zero.
- TI - temperatura inicial em cada nó.
- NNTID - número de nós com temperatura inicial diferente de TI.
- T(K, 1) - temperatura inicial do nó K, se NNTID \neq 0.
- NZ - para quantos operadores hermitianos vou resolver o problema (número de zetas).
- NDT - número de diferentes intervalos de tempo para um mesmo zeta.
- NPASS - número de passos a serem pulados para impressão da temperatura.

ZETA - valor de zeta, dependendo do operador hermitiano que se queira utilizar.

NETAP - número de etapas total para cada zeta.

NDTD - número de diferentes intervalos de tempo numa mesma etapa.

DELTAT - valor do intervalo de tempo.

Se NDTD \neq 0:

NETAP1 - etapa inicial para cada DELTAT diferente.

NETAP2 - etapa final para cada DELTAT diferente.

As variáveis de entrada do programa "HEAT" estão dimensionadas conforme a lista abaixo, podendo-se alterar este dimensionamento quando o problema assim exigir.

TIT1(20), COORD(250,2), IELMS(100,8), IMAT(100), THICK(100), CTERM(3,2), ICODE(250), QI(50,8), NECFI(100), QF(100,8), NDNTP(100), TP(100), CONVEC(10, 4, 2, 50), DLT(250).

Formato para Entrada dos Dados

CARTÃO	FORMATO
NPROB, IVTA	2I5
TIT1	20A4
NNOS, NELMS, NTM, NCOOR, NETNOS, NCODE, IELM1, IELM2	6I10, 2I5
K, COORD(K, 1), COOR(K, 2), INCNO, VINCX, NINC.	I10, 2F10.0, I10, F10.0, I10
Se NCODE \neq 0 K, ICODE(K), INCNO, NINC	4I10
M, IELMS(M, I), I = 1,8, IMAT(M), THICK(M)	10I5, F10.0
IMAT, CTERM(IMAT, 1), CTERM(IMAT, 2)	I10, 2F10.0
NELFI, NULAC, NNTP, NULETP, NULACO	5I10
Se NELFI \neq 0 ICOQI, QINT Se ICOQI \neq 1 \rightarrow NELC, QI(NELC,J), J = 1,8	I10, F10.0 I8, 8F8.0

Se NULAC \neq 0 NELC, N01, N02, N03 QF(N01), QF(N02), QF(N03)	4I10 3F10.0
Se NNTP \neq 0 K, TP(K), INCNO, NINC	I10, F10.0, 2I10
Se NULACO \neq 0 NUMINT K, L, ICONT CONVEC(K, L, 1, 1) Y1, Y2, X1, X2, VINCRE	I10 3I10 F10.0 5F10.0
TI, NNTID	F10.0, I10
Se NNTID \neq 0 K, T(K, 1)	I10, F10.0
NZ, NDT, NPASS	3I10
ZETA	F10.0
NETAP, NDTD, DELTAT	2I10, F10.0
Se NDTD \neq 0 NETAP1, NETAP2, DELTAT	2I10, F10.0
NPROB (=0 para parada do programa)	I5